Ученые записки Таврического национального университета им. В. И. Вернадского

Серия "Математика. Механика. Информатика и Кибернетика"N 1 (2002) 15 – 18

УДК 517.98

Л. Л. Оридорога

СКАЛЯРНЫЕ ОПЕРАТОРЫ В КОНЕЧНОМЕРНЫХ ПРОСТРАНСТВАХ, ПРЕДСТАВИМЫЕ В ВИДЕ СУММЫ ПРОЕКТОРОВ

Задача о представлении скалярных операторов λI в гильбертовом пространстве H исследовались различными авторами (см., например, [1] и [2] и список литературы в них)

Так в [1] рассматриваются множества Λ_k — множество λ таких, что λI представляется в виде суммы k проекторов и Σ_k — множество λ таких, что λI представляется в виде суммы k ортопроекторов.

Именно, в [1] показано, что $\Lambda_k = \Sigma_k$ при $k \leq 4$ и

$$\Lambda_1 = \{0,1\}, \quad \Lambda_2 = \{0,1,2\}, \quad \Lambda_3 = \{0,1,\frac{3}{2},2,3\}, \quad \Lambda_4 = \{0,1,2,2\pm\frac{2}{n},3,4\}.$$

Кроме того, там же, в [1], показано что $\Lambda_k = \mathbb{C}$ при $k \geq 5$ и

$$\Sigma_k \supset \{0,1,1+\frac{n}{n(k-3)+2},\ [1+\frac{1}{k-3},k-1-\frac{1}{k-3}],\ k-1-\frac{n}{n(k-3)+2},k-1,k\}$$

при $k \geq 6$. В [2] показано также, что

$$\Sigma_k \subset \{0,1,1+\frac{1}{k-1},\ [1+\frac{1}{k-2},k-1-\frac{1}{k-2}],\ k-1-\frac{1}{k-1},k-1,k\}$$

при $k \geq 6$.

Отметим еще работу [3] в которой показано, что оператор $0I$ может быть представлен в виде суммы пяти (но не может быть представлен в виде суммы четырёх !) **ненулевых** проекторов.

В данной заметке описываются Λ^n и Σ^n — множества таких λ, что скалярный оператор λI в n-мерном гильбертовом пространстве $\mathbb{C}^n$ может быть представлен в виде суммы нескольких произвольных проекторов или ортопроекторов соответственно. Другими словами описываются множества

$$\Lambda^n = \{\lambda\ :\ \lambda I = \sum_{j=1}^{k} P_j\}, \qquad \text{где } P_j = P_j^2 \tag{1}$$

и

$$\Sigma^n = \{\lambda\ :\ \lambda I = \sum_{j=1}^{k} P_j\}, \qquad \text{где } P_j = P_j^* = P_j^2. \tag{2}$$

Подчеркнём, что при этом в отличии от работ [1] и [2] рассматриваются суммы произвольного числа проекторов, т.е. k в формулах (1) и (2) пробегает всё множество натуральных чисел.

Лемма 1. *Пусть H — эвклидово пространство размерности n.*

Пусть $\{P_j : j = 1, 2, \ldots, k\}$ — система проекторов, такая, что

$$\sum_{j=1}^{k} P_j = \lambda I. \tag{3}$$

Тогда либо $\lambda = 0$, либо $\lambda = \frac{m}{n}$, где m — целое и $m \geq n$.

Доказательство. Из равенства (3) следует что

$$\sum_{j=1}^{k} \operatorname{tr} P_j = \lambda \operatorname{tr} I = \lambda n = m. \tag{4}$$

И поскольку

$$\operatorname{tr} P_j = \operatorname{rank} P_j \tag{5}$$

— целые числа, то и m также целое число.

Кроме того из равенств (4) и (5) следует, что

$$m = \sum_{j=1}^{k} \operatorname{tr} P_j = \sum_{j=1}^{k} \operatorname{rank} P_j.$$

И поскольку

$$\sum_{j=1}^{k} \operatorname{rank} P_j \geq \operatorname{rank} \sum_{j=1}^{k} P_j,$$

то $m \geq \operatorname{rank} I = n$.

Теперь покажем, что если n и m удовлетворяют условиям леммы 1, то оператор $\frac{m}{n} I$ может быть представлен в виде суммы ортопроекторов. Пример таких ортопроекторов будет представлен в явном виде.

Пусть n и m – натуральные числа, причём $n \leq m$.

Пусть также $0 \leq k_1 < k_2 < \cdots < k_n < m$. И вектора $\vec{x_l}$ $(0 \leq l < m)$ определены следующим образом:

$$\vec{x_l} = \frac{1}{\sqrt{n}} \begin{pmatrix} e^{\frac{2\pi i k_1}{m} l} \\ e^{\frac{2\pi i k_2}{m} l} \\ \ldots \\ e^{\frac{2\pi i k_n}{m} l} \end{pmatrix}.$$

Лемма 2. *Пусть P_l – ортопроектор на $\vec{x_l}$.*

Тогда $\sum\limits_{l=0}^{m-1} P_l = \frac{m}{n} I$.

Доказательство. Обозначим p_{lij} элемент матрицы P_l, т.е.

$$P_l = (p_{lij})_{i,j=1}^{n}.$$

Поскольку вектор $\vec{x_l}$ нормирован, то

$$P_l = x_l \cdot x_l^*.$$

Поэтому

$$p_{lij} = \frac{1}{n} e^{\frac{2\pi i (k_i - k_j)}{m} l}.$$

Причём $|k_i - k_j| < m$ и кроме того $|k_i - k_j| = 0$ тогда и только тогда, когда $i = j$.

Следовательно

$$\sum_{l=0}^{m-1} p_{lij} = \frac{1}{n}\sum_{l=0}^{m-1}\left(e^{\frac{2\pi i(k_i-k_j)}{m}}\right)^l = \frac{m}{n}\delta_i^j.$$

А это и означает, что $\sum\limits_{l=0}^{m-1} P_l = \frac{m}{n}I$.

Теперь легко может быть доказана следующая теорема, дающая описание множеств Σ^n и Λ^n.

Теорема 1. *При всех* n

$$\Sigma^n = \Lambda^n = \{0\} \cup \{\frac{m}{n} \ : \ m \in \mathbb{N} \ \& \ m \geq n\}. \tag{6}$$

Доказательство. Из леммы 1 следует, что

$$\Lambda^n \in \{0\} \cup \{\frac{m}{n} \ : \ m \in \mathbb{N} \ \& \ m \geq n\}.$$

Из леммы 2 следует, что

$$\{0\} \cup \{\frac{m}{n} \ : \ m \in \mathbb{N} \ \& \ m \geq n\} \in \Sigma^n.$$

Поэтому из очевидного включения $\Sigma^n \subset \Lambda^n$ вытекает равенство (6)

Ниже приведены примеры наборов ортопроекторов описанных в лемме 2.

Пример 1. ($n = 3, \ m = 4; \quad k_2 = 1, \ k_3 = 2.$)

$$\vec{x_0} = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \quad \vec{x_1} = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\i\\-1\end{pmatrix}, \quad \vec{x_2} = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}, \quad \vec{x_3} = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\-i\\-1\end{pmatrix}$$

При этом

$$P_0 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix}, \qquad P_1 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}1&-i&-1\\i&1&-i\\-1&i&1\end{pmatrix},$$

$$P_2 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}1&-1&1\\-1&1&-1\\1&-1&1\end{pmatrix}, \qquad P_3 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}1&i&-1\\-i&1&i\\-1&-i&1\end{pmatrix}.$$

Пример 2. ($n = 5, \ m = 6; \quad k_2 = 1, \ k_3 = 2, k_4 = 3, \ k_5 = 4.$)

$$\vec{x_0} = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\\1\end{pmatrix}, \qquad \vec{x_1} = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}1\\\frac{1+\sqrt{3}i}{2}\\\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}\\-1\\\frac{-1-\sqrt{3}i}{2}\end{pmatrix}, \qquad \vec{x_2} = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}1\\\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}\\\frac{-1-\sqrt{3}i}{2}\\-1\\\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}\end{pmatrix},$$

$$\vec{x_3} = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \vec{x_4} = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 1 \\ \frac{-1-\sqrt{3}i}{2} \\ \frac{-1+\sqrt{3}i}{2} \\ -1 \\ \frac{-1-\sqrt{3}i}{2} \end{pmatrix}, \qquad \vec{x_5} = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1-\sqrt{3}i}{2} \\ \frac{-1-\sqrt{3}i}{2} \\ -1 \\ \frac{-1+\sqrt{3}i}{2} \end{pmatrix}$$

В этом случае матрицы P_l имеют вид

$$P_l = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & \left(\frac{1-\sqrt{3}i}{2}\right)^l & \left(\frac{-1-\sqrt{3}i}{2}\right)^l & (-1)^l & \left(\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}\right)^l \\ \left(\frac{1+\sqrt{3}i}{2}\right)^l & 1 & \left(\frac{1-\sqrt{3}i}{2}\right)^l & \left(\frac{-1-\sqrt{3}i}{2}\right)^l & (-1)^l \\ \left(\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}\right)^l & \left(\frac{1+\sqrt{3}i}{2}\right)^l & 1 & \left(\frac{1-\sqrt{3}i}{2}\right)^l & \left(\frac{-1-\sqrt{3}i}{2}\right)^l \\ (-1)^l & \left(\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}\right)^l & \left(\frac{1+\sqrt{3}i}{2}\right)^l & 1 & \left(\frac{1-\sqrt{3}i}{2}\right)^l \\ \left(\frac{-1-\sqrt{3}i}{2}\right)^l & (-1)^l & \left(\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}\right)^l & \left(\frac{1+\sqrt{3}i}{2}\right)^l & 1 \end{pmatrix}$$

Легко убедиться, что сумма этих матриц действительно равна $\frac{6}{5}I$.

Список литературы

[1] *В.И. Рабанович, Ю.С. Самойленко* Когда сумма идемпотентов или проекторов кратна единице // Функциональный анализ и приложения — 2000. — 34, N 4 — p.91–93

[2] *В.И. Рабанович, Ю.С. Самойленко* Скалярные операторы представимые суммой проекторов // Укр. мат. журнал — 2001. — т.53, N 7 — p.939–952

[3] *Bart H., Ehrhart T., Silbermann B.* // Integral Equations Operator Theory — 1994. — 19 — p.123–134

Поступила в редакцию 16.03.2002