Ученые записки Таврического национального университета им. В. И. Вернадского

Серия "Математика. Механика. Информатика и Кибернетика"N 1 (2002) 107 – 111

УДК 517.95

А. Ю. Мальцев

# ЗАДАЧА КОШИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ С СУЩЕСТВЕННО БЕСКОНЕЧНОМЕРНЫМ ЭЛЛИПТИЧЕСКИМ ОПЕРАТОРОМ, ЗАВИСЯЩИМ ОТ ВРЕМЕНИ

**1.** Здесь мы рассмотрим некоторые основные определения и факты, которыми будем пользоваться в дальнейшем. Пусть $H$ — сепарабельное вещественное гильбертово пространство, $L(H)$ - пространство ограниченных линейных операторов в $H$. Множество $M \subseteq L(H)$ называется почти компактным, если $\forall \varepsilon > 0$ существует компактное множество $K \subseteq L(H)$, и числа $n \in \mathbf{N}$, $c > 0$, такие, что $K + Q_{n,c}$ является $\varepsilon$–сетью для $M$ ($Q_{n,c}$– множество всех операторов ранг которых $\leq n$, а норма $\leq c$). В работе [1] введена алгебра функций $\mathfrak{A}_0 \in C^2(H)$. В $\mathfrak{A}_0$ входят те и только те финитные функции из $C^2(H)$ для которых: 1.) $\forall R > 0 \quad \exists$ почти компактное множество $M \subseteq L(H)$ такое, что $u''(x) \in M, \forall x \in B_R = \{x \mid \|x\| \leq R\}$; 2.)$u''(\cdot)$ равномерно непрерывна на ограниченных подмножествах в $H$. Все рассмотрения в этой статье мы будем проводить в банаховом пространстве $X$ функций, которое является замыканием $\mathfrak{A}_0$ в $C^2(H)$ по $sup \mid \cdot \mid$ норме.

Обозначим через $B_C(H)$ пространство самосопряжённых ограниченных операторов в пространстве $H$. В соответствии с терминологией [2] назовём функционал $j$ в пространстве $B_C(H)$ существенно бесконечномерным, если в его ядро входят все операторы конечного ранга. Рассмотрим функцию $j(\cdot)$, где $t \in [0,T] = \triangle$. $\forall t_0 \in \triangle : j(t_0)$ – положительный существенно бесконечномерный линейный функционал в пространстве $B_C(H)$. Будем здесь считать, что $j(t)$ удовлетворяет условию Липшица на отрезке $\triangle$. В работе [2] была построена $C_0$ - полугруппа операторов $T^j(t)$ в пространстве $X$ ($j$ – положительный существенно бесконечномерный). Результатом действия оператора $T^j(t)$ на функцию $\varphi \in \mathfrak{A}_0$ является решение задачи Коши $\frac{du(t,x)}{dt} = \frac{1}{2}j(u''_{xx}(t,x))$ в точке $t$ с начальным условием $u(0,x) = \varphi$. В [1] доказано, что $(T^j(t)\varphi)(x) = \lim_{n\to\infty} \int_H \varphi(x-y)\mu_{tA_n}(dy)$, где $A_n$ – положительные операторы конечного ранга такие, что $\|A_n\| \to 0$; $\forall n \in \mathbf{N}\, Sp(A_n) = \|j\|$, а $\mu_A(dx)$ — гауссова мера с корреляционным оператором $A$. В дальнейшем мы будем пользоваться свойствами полугруппы $T^j(t)$, полученными в работе [2] без дополнительных ссылок.

В работе [4] были введены и изучены векторные поля $Z$ класса $\mathfrak{A}_0$. Векторное поле $Z$ на $H$ принадлежит классу $\mathfrak{A}_0$, если: 1.) $Z$ имеет ограниченный носитель; 2.)$\{Z'(x) \mid x \in H\}$– почти компактно; 3.)$\{(\xi, Z''(x)) = (\xi, Z)''(x) \mid \|\xi\| \leq 1; x \in H\}$–почти компактно; 4.)$Z$ дважды непрерывно дифференцируемо на $H$, причём второй ковариантный дифференциал $Z$–равномерно непрерывная на $H$ операторнозначная функция. В дальнейшем мы будем пользоваться свойствами векторных полей класса $\mathfrak{A}_0$, полученными в работе [4] без дополнительных ссылок.

Пусть $q = \{t_0 = 0, t_1, t_2, \ldots, t_n = T\}$ – некоторое разбиение отрезка $\triangle$. Пусть $t, s \in \triangle; s \leq t$, причём $t_{j-1} < s \leq t_j$, $t_m \leq t < t_{m+1}$. Если $U(t,s)$–некоторое семейство операторов в пространстве $X$, то $U_q(t,s) \triangleq U(t,t_m)U(t_m,t_{m-1})\ldots U(t_{j+1},t_j)U(t_j,s)$.

**2.** А сейчас мы рассмотрим задачу Коши для уравнения $\frac{du(t,x)}{dt} = \frac{1}{2}j(t)(u''_{xx}(t,x))$, где $t \in [0,T] = \triangle$. Будем полагать, что начальное условие $\varphi \in \mathfrak{A}_0$. $U(t,s) \triangleq T^{j(s)}(t-s)$.

Обозначим через $\widetilde{U}(t,\tau)$ решение задачи Коши в точке $t$ с начальным условием $\varphi \in \mathfrak{A}_0$ в точке $\tau$.

**Теорема 1.** *Решение рассматритваемой задачи Коши даётся следующей формулой:*

$$\widetilde{U}(t,\tau)\varphi = \lim_q U_q(t,\tau)\varphi.$$

**Доказательство.** Для доказательства существования предела воспользуемся теоремой 2.1 из гл.6 [3]. В соответствии с этой теоремой достаточно доказать равномерную липшицевость семейства $U_q(t,s)$, а так же проверить выполнение оценки $\|U(t,s)\varphi - U(t,\theta)U(\theta,s)\varphi\| \le K(\varphi)(t-\theta)(\theta-s)^\alpha$ $(0<\alpha\le 1)$, для всех $\varphi$ из некторого всюду плотного в $X$ и инвариантного относительно семейства $U(t,s)$ множества $D$; причём функция $K(\varphi)$ должна удовлетворять условию $\sup_{q,t,s} K(U_q(t,s)(\varphi)) = k(\varphi) < \infty$ $(\varphi \in D)$. В качестве множества $D$ в нашем случае будет выступать $\mathfrak{A}_0$. Равномерная липшицевость семейства $U_q(t,s)$ немедленно вытекает из того, что $\|U_q(t,s)\| \le 1; \forall t,s \in \Delta, \forall q \in \{q\}$. Теперь остаётся оценить норму разности $U(t,s)\varphi - U(t,\theta)U(\theta,s)\varphi, \varphi \in \mathfrak{A}_0$.

$$\begin{aligned}\| U(t,s)\varphi - U(t,\theta)U(\theta,s)\varphi \| &= \| T^{j(s)}(t-s)\varphi - T^{j(\theta)}(t-\theta)T^{j(s)}(\theta-s)\varphi \| = \\ &= \| T^{j(s)}(t-\theta)T^{j(s)}(\theta-s)\varphi - T^{j(\theta)}(t-\theta)T^{j(s)}(\theta-s)\varphi \| = \\ &= \| T^{j(s)}(t-\theta)\psi - T^{j(\theta)}(t-\theta)\psi \| . \end{aligned} \tag{1}$$

Мы обозначили $\psi = T^{j(s)}(\theta-s)\varphi$. $\psi \in \mathfrak{A}_0$ согласно свойствам полугруппы $T^{j(s)}(t)$. Для оценки $\| T^{j(s)}(t-\theta)\psi - T^{j(\theta)}(t-\theta)\psi \|$, используем следующую формулу:

$$T^{j_2}(t)\psi - T^{j_1}(t)\psi = t\int_0^1 T^{j_1+\alpha(j_2-j_1)}(t)(L_2-L_1)\psi d\alpha, \tag{2}$$

для любых двух положительных существенно бесконечномерных функционалов $j_1, j_2$. Операторы $L_1 = L^{j_1}$ и $L_2 = L^{j_2}$ таковы, что $\overline{L_1}$ - генератор полугруппы $T^{j_1}(t)$, а $\overline{L_2}$ - генератор полугруппы $T^{j_2}(t)$. Из этой формулы вытекает, что

$$\begin{aligned}&\|T^{j(\theta)}(t-\theta)\psi - T^{j(s)}(t-\theta)\psi\| \le \\ &\le (t-\theta)\int_0^1 \|T^{j(s)+\alpha(j(\theta)-j(s))}(t-\theta)(L^{j(\theta)} - L^{j(s)})\psi\| d\alpha \le (t-\theta)\|(L^{j(\theta)} - L^{j(s)})\psi\|.\end{aligned} \tag{3}$$

Зафиксируем теперь $x \in H$.

$$| (L^{j(\theta)} - L^{j(s)})\psi(x) | = | (j(\theta)-j(s))(\psi''(x)) | \le \|j(\theta)-j(s)\| \cdot \|\psi''(x)\|. \tag{4}$$

Поскольку семейство $j(t)$ удовлетворяет условию Липшица на отрезке $\Delta$, то $\exists C>0, \forall\theta, s \in \Delta : \|j(\theta)-j(s)\| \le C \mid \theta - s \mid$. Поэтому, учитывая (4), будем иметь:

$$| (L^{j(\theta)-} - L^{j(s)})\psi(x) | \le C(\theta-s)\sup_{x\in H} \|\psi''(x).\| \tag{5}$$

Следовательно, учитывая (3) и (5), будем иметь:

$$\|T^{j(\theta)}(t-\theta)\psi - T^{j(s)}(t-\theta)\psi\| \le C(t-\theta)(\theta-s)\sup_{x\in H}\|\psi''(x)\|. \tag{6}$$

Пусть теперь $K(\psi) \triangleq \sup_{x\in H}\|\psi''(x)\|$. Если доказать, что $K(\psi) = K(U(\theta,s)\varphi) = K(T^{j(s)}(\theta-s)\varphi) \le K(\varphi)$ для всех $\varphi \in \mathfrak{A}_0$, то учитывая (1) и (6) будем иметь, что $\|U(t,s)\varphi - U(t,\theta)U(\theta,s)\varphi\| \le C \cdot K(\varphi)(t-\theta)(\theta-s)$. Кроме того, учитывая определение $U_q(t,s)$, последовательное применение данного утверждения приведёт к тому, что для всех функций $\varphi \in \mathfrak{A}_0$ $\sup_{q,t,s} K(U_q(t,s)\varphi) \le K(\varphi) = \sup_{x\in H} \|\varphi''(x)\| < +\infty$. Тем самым существование предела $lim_q U_q(t,s)\varphi$ в соответствии с теоремой 2.1 из главы 6 [3] будет полностью доказано. Для доказательства высказанного утверждения воспользуемся следующим свойством полугрупп $T^j(t)$: для любой функции $\varphi \in \mathfrak{A}_0$ и для любых векторов $h_1, h_2 \in H$ $\quad (\varphi'(\cdot), h_1) \in X, (\varphi''(\cdot)h_1, h_2) \in X$. При этом выполняются следующие равенства:

$$((T(t)\varphi)', h_1) = T(t)(\varphi'(\cdot), h_1); \tag{7}$$

$$((T(t)\varphi)'' h_1, h_2) = T(t)(\varphi''(\cdot)h_1, h_2). \tag{8}$$

Итак,

$$K(U(\theta,s)\varphi) = \sup_{x\in H} \|(T^{j(s)}(\theta - s)\varphi)''(\cdot)\| =$$
$$= \sup\{((T^{j(s)}(\theta-s)\varphi)''(x)h,h) \mid x \in H; \| h \| \le 1\} = \sup\{T^{j(s)}(\theta-s)(\varphi''(\cdot)h,h)(x) \mid \tag{9}$$
$$x \in H; \| h \| \le 1\} \le \sup\{(\varphi''(x)h,h) \mid x\in H; \| h \| \le 1\} = \sup_{x\in H} \|\varphi''(x)\|.$$

Согласно предложению 2.2 из главы 6 [3], производящим оператором $A(t)$ семейства $\widetilde{U}(t,s)$ является $U_1'(t,t)$.

$$\frac{d}{dt}U(t,s)\varphi = \frac{d}{dt}T^{j(s)}(t-s)\varphi = T^{j(s)}(t-s)L^{j(s)}\varphi.$$

Отсюда, $U_1'(t,t)\varphi = L^{j(t)}\varphi$. Теорема полностью доказана.

**3.** Теперь мы готовы к рассмотрению задачи Коши для уравнения $\frac{du(t,x)}{dt} = \frac{1}{2}j(t)(u''_{xx}(t,x)) + Zu$, где $t \in [0,T] = \triangle$. Будем полагать, что начальное условие $\varphi \in \mathfrak{A}_0$. Решение задачи Коши будем искать именно в этом классе функций. Z - векторное поле класса $\mathfrak{A}_0$. Поток, $\Phi_t(x) = \Phi(t,x)$, соответствующий такому векторному полю определён для всех $(t,x) \in \mathbb{R} + H$. Определим в пространстве $X$ полугруппу $P(t)$ по формуле $P(t)u = u \circ \Phi_t$. Свойства таких полугрупп были изучены в [4]. Обозначим через $\widetilde{U}(t,\tau)$ решение рассматриваемой задачи Коши в точке $t$ с начальным условием $\varphi \in \mathfrak{A}_0$ в точке $\tau$. Введём в рассмотрение следующие семейства операторов: $V(t,s) = T^{j(s)}(t-s)$; $Z(t,s) = P(t-s)$. Положим в этом пункте, что $U(t,s) = V(t,s)Z(t,s)$

**Теорема 2.** *Решение рассматритваемой задачи Коши даётся следующей формулой:*

$$\widetilde{U}(t,\tau)\varphi = \lim_q U_q(t,\tau)\varphi.$$

**Доказательство.** Для доказательства воспользуемся теоремой 2.1 из гл. 6 [3]. Равномерная липшицевость семейства $U_q(t,s)$ немедленно вытекает из того, что $\|U_q(t,s)\| \le 1; \forall t,s \in \triangle, \forall q \in \{q\}$, а это в свою очередь следует из того, что $\|P(t)\| \le 1$ и $\|V(t,s)\| \le 1$. Теперь остаётся оценить норму разности $U(t,s)\varphi - U(t,\theta)U(\theta,s)\varphi, \varphi \in \mathfrak{A}_0$.

$$\|U(t,\theta)U(\theta,s)\varphi - U(t,s)\varphi\| =$$
$$= \|T^{j(\theta)}(t-\theta)P(t-\theta)T^{j(s)}(\theta-s)P(\theta-s)\varphi - T^{j(s)}(t-s)P(t-s)\varphi\| =$$
$$= \|T^{j(\theta)}(t-\theta)P(t-\theta)T^{j(s)}(\theta-s)P(\theta-s)\varphi - T^{j(s)}(t-s)P(t-\theta)P(\theta-s)\varphi\| =$$
$$= \|T^{j(\theta)}(t-\theta)P(t-\theta)T^{j(s)}(\theta-s)\psi - T^{j(s)}(t-\theta)T^{j(s)}(\theta-s)P(t-\theta)\psi\|. \tag{10}$$

Здесь через $\psi$ мы обозначили $P(\theta-s)\varphi$. Согласно свойствам полугруппы $P(t), \psi \in \mathfrak{A}_0$. Введём следующие обозначения: $A = T^{j(\theta)}(t-\theta)$; $B = T^{j(s)}(t-\theta)$, $\psi_1 = P(t-\theta)T^{j(s)}(\theta-s)\psi$,

$\psi_2 = T^{j(s)}(\theta - s)P(t-\theta)\psi$. Поскольку $\|A\psi_1 - B\psi_2\| \le \|\psi_1 - \psi_2\| + \|A\psi_2 - B\psi_2\|$ ($\|A\| \le 1$), то для оценки (10) достаточно оценить $\|\psi_1 - \psi_2\|$ и $\|A\psi_2 - B\psi_2\|$. Оценим сначала $\|\psi_1 - \psi_2\|$.

$$(T^{j(s)}(\theta - s)P(t-\theta)\psi - P(t-\theta)T^{j(s)}(\theta - s)\psi)(x) = T^{j(s)}(\theta - s)(\psi \circ \Phi_{t-\theta})(x) -$$
$$-T^{j(s)}(\theta - s)\psi(\Phi_{t-\theta}(x)) = \lim_{n\to\infty} \int\limits_H (\psi(\Phi(t-\theta, x+y)) - \psi(\Phi(t-\theta, x) + y))\mu_{(\theta-s)A_n}(dy) \quad (11)$$

Правая часть данного выражения зависит только от значения подынтегральной функции в шаре $\|y\| \le \sqrt{(\theta - s)\|j(s)\|}$, поскольку функционал $j(s)$ существенно бесконечномерный. С другой стороны имеют место следующие неравенства

$$\|\Phi(t-\theta, x+y) - \Phi(t-\theta, x) - y\| \le \sup_x \|\frac{\partial \Phi}{\partial x}(t-\theta, x) - I\|\|y\|; \quad (12)$$

$$\sup_x \|\Phi(t-\theta, x) - I\| \le \exp{(t-\theta)C_1} - 1 \le C_2(t-\theta), \quad (13)$$

для некоторых положительных констант $C_1$ и $C_2$. Из соотношений (12) и (13) следует, что

$$\|\Phi(t-\theta, x+y) - \Phi(t-\theta, x) - y\| \le C_2\|j(s)\|^{1/2}(t-\theta)(\theta-s)^{1/2} \le const(t-\theta)(\theta-s)^{1/2}. \quad (14)$$

С учётом (14) можем написать, что

$$|\ \psi(\Phi(t-\theta, x+y)) - \psi(\Phi(t-\theta, x) + y)\ | \le const(t-\theta)(\theta-s)^{1/2} \sup_x \|\psi'(x)\|. \quad (15)$$

Исходя из (11) и (15) делаем окончательный вывод:

$$\|(T^{j(s)}(\theta - s)P(t-\theta)\psi - P(t-\theta)T^{j(s)}(\theta - s)\psi)\| \le K_1(\psi)(t-\theta)(\theta-s)^{1/2}. \quad (16)$$

Мы ввели следующее обозначение: $K_1(\psi) \triangleq const \cdot \sup_x \|\psi'(x)\|$.
Теперь оценим $\|A\psi_2 - B\psi_2\|$. Исходя из (6) и определения операторов $A$ и $B$, будем иметь

$$\|T^{j(\theta)}(t-\theta)\psi_2 - T^{j(s)}(t-\theta)\psi_2\| \le K_2(\psi_2)(t-\theta)(\theta-s); K_2(\psi_2) \triangleq C \sup_{x\in H} \|\psi_2''(x)\|, \quad (17)$$

где $C$ — констаната Липшица для функции $j(t)$. Резюмируя (6), (16) и (17), можем написать

$$\|U(t,\theta)U(\theta,s)\varphi - U(t,s)\varphi\| \le K_1(\psi)(t-\theta)(\theta-s)^{1/2} + K_2(\psi_2)(t-\theta)(\theta-s), \quad (18)$$

где $K_1(\psi) = const_1 \cdot \sup_x \|\psi'(x)\|$; $K_2(\psi_2) = const_2 \cdot \sup_x \|\psi_2''(x)\|$; $\psi = P(\theta - s)\varphi$; $\psi_2 = T^{j(s)}(\theta - s)P(t-\theta)\psi$. Сейчас мы докажем, что имеют место неравенства: $K_1(\psi) \le const \cdot K_1(\varphi)$ и $K_2(\psi_2) \le const \cdot K_1(\varphi) + const \cdot K_2(\varphi)$.

$$K_1(P(t)\varphi) = \sup_x \|\ (\varphi \circ \Phi_t)'(x)\ \| \le$$
$$\le exp(tC_1) \sup_x \|\varphi'(\cdot)\| \le exp(TC_1) \sup_x \|\varphi'(\cdot)\| \le const \cdot K_1(\varphi).$$

$$\begin{aligned} &\sup_x \|(T^{j(s)}(\theta - s)P(t-\theta)\psi)''(x)\| = \\ &= \sup_x \|(T^{j(s)}(\theta - s)(P(t-\theta)\psi))''(x)\| \le \sup_x \|(P(t-\theta)\psi)''(x)\|. \end{aligned} \quad (19)$$

На основании свойств полугруппы $P(t)$, установленных в работе [4], для некоторых констант $C_1, C_2 > 0$ будем иметь при $t \in \Delta$

$$\sup_x \|(P(t-\theta)\psi)''(x)\| \le exp(2(t-\theta)C_1) \sup_x \|\psi''(x)\| +$$
$$+2C_2(t-\theta)exp(3(t-\theta)C_1) \sup_x \|\psi'(x)\| \le const \cdot \sup_x \|\psi''(x)\| + const \cdot \sup_x \|\psi'(x)\| \quad (20)$$

Из (19), (20) и определения $K_2$ выводим: $K_2(\psi_2) \leq const \cdot K_1(\psi) + const \cdot K_2(\psi)$. Вспомнив, что $\psi = P(t-\theta)\varphi$, и применив аналогичные утверждения ещё раз, с учётом (18) получим: $\|U(t,\theta)U(\theta,s)\varphi - U(t,s)\varphi\| \leq const \cdot K_2(\varphi)(t-\theta)(\theta-s) + const \cdot K_1(\varphi)(t-\theta)(\theta-s)^{1/2}$. Рассуждениями, подобными приведённым в предыдущем параграфе (см. в частности формулу (9)), доказывается, что:

$$\sup_{q,t,s} K_2(U_q(t,s)\varphi) = \sup_{q,t,s} \sup_{x} \|(U_q(t,s)\varphi)''(x)\| = k_2(\varphi) < +\infty;$$

$$\sup_{q,t,s} K_1(U_q(t,s)\varphi) = \sup_{q,t,s} \sup_{x} \|(U_q(t,s)\varphi)'(x)\| = k_1(\varphi) < +\infty;$$

Теперь достаточно применить утверждение теоремы 2.1 из главы 6 [3], чтобы завершить доказательство существования предела $\lim_q U_q(t,s)\varphi$.

$$\frac{d}{dt}U(t,s)\varphi = \frac{d}{dt}V(t,s)P(t-s)\varphi = V_1'(t,s)(P(t-s)\varphi) + V(t,s)P'(t-s)\varphi.$$

Значит, $U_1'(t,t)\varphi = L^{j(t)}\varphi + Z\varphi$. Это завершает доказательство теоремы.

## Список литературы


[1] Богданский Ю.В. *Задача Коши для уравнения теплопроводности с нерегулярным эллиптическим оператором*//Укр. мат. журн.—1989.–т41, №5.–с.584-590.

[2] Богданский Ю.В. *Задача Коши для существенно бесконечномерного параболического уравнения с переменными коэффициентами*//Укр. мат. журн.—1994.–т46, №6.–с.663-670.

[3] Далецкий Ю.Л., Фомин С.В. *Меры и дифференциальные уравнения в бесконечномерных пространствах* М.:Наука, Главная редакция физико-математической литературы, 1983.—384 с.

[4] Bogdansky Yu.V., *Cauchy problem for the essentially infinite-dimensional heat equation on a surface in Hilbert space*//Укр. мат. журн.—1995.–т47, №6.–с.737-746.


Поступила в редакцию 17.04.2002