Ученые записки Таврического национального университета им. В. И. Вернадского

Серия "Математика. Механика. Информатика и Кибернетика"N 1 (2002) 157 – 166

УДК 517.4-517.5

Г. И. Лаптев

ПРЕДЕЛЬНО МОНОТОННЫЕ ОПЕРАТОРЫ И ПРИЛОЖЕНИЯ

В рамках теории монотонных операторов вводится новый класс операторов, названных предельно монотонными. Изучаются связи этого класса с известными: псевдомонотонными, операторами с (S_+)-свойством и (M)-свойством. В терминах нового класса характеризуются псевдомонотонные операторы. Указываются условия, при которых псевдомонотонные по Брезису операторы совпадают с псевдомонотонными по Скрыпнику. Изучаются уравнения с предельно монотонными операторами и предлагаются достаточные условия разрешимости таких уравнений.

Keywords: монотонные операторы, псевдомонотонные операторы, уравнения с монотонными операторами

1. Классификация операторов, близких к монотонным

Пусть X, X^* — вещественные банаховы пространства, сопряженные относительно двойственности (f, u), где $f \in X^*$, $u \in X$. Оператор $A : X \to X^*$, определенный на всем пространстве X и принимающий значения в X^*, называется монотонным, если для всех элементов $u, v \in X$ выполняется соотношение $(Au - Av, u - v) \geq 0$. Теория монотонных операторов стала создаваться в шестидесятые годы двадцатого столетия трудами многих математиков. Эта теория получила значительное развитие благодаря приложениям к широким классам квазилинейных уравнений и систем с частными производными высокого порядка. Определенные итоги подведены во многих монографиях и обзорах, из которых упомянем только книги Ж.-Л. Лионса [1], И.В. Скрыпника [2], а также обзорные работы Ю.А. Дубинского [3, 4]. Метод монотонности продолжает активно развиваться, и его теория регулярно отражается в научной литературе (см., например, книги [5, 6, 7] и работы автора [8, 9, 10, 11, 12] и ссылки там).

Желая расширить круг приложений, многие авторы вводили разнообразные классы операторов, близких к монотонным. К настоящему времени насчитывается более десяти подобных классов. Приведем одну группу определений.

Definition 1. Пусть X — вещественное сепарабельное банахово пространство с сопряженным X^*. Оператор $A : X \to X^*$ называется:

(1a) *равномерно монотонным*, если для всех $u, v \in X$

$$(Au - Av, u - v) \geq \rho(\|u - v\|),$$

где $\rho(s)$ — непрерывная, возрастающая функция, определенная на $[0, \infty)$, причем $\rho(0) = 0$;

(1b) *монотонным*, если для всех $u, v \in X$

$$(Au - Av, u - v) \geq 0;$$

(1c) *оператором с полуограниченной вариацией*, если для всех $u, v \in X$

$$(Au - Av, u - v) \geq -c(\|u - v\|'),$$

где $\|\cdot\|'$ — норма, компактная по сравнению с нормой $\|\cdot\|$ в X, функция $c(s)$ непрерывна на $[0, \infty)$, причем $s^{-1}c(s) \to 0$ при $s \to +0$;

(1d) *предельно монотонным*, если для каждой слабо сходящейся в X последовательности $u_n \rightharpoonup u$ $(n \to \infty)$ справедливо соотношение при $n \to \infty$

$$\liminf (Au_n, u_n - u) \geq 0.$$

Классы операторов со свойствами (1a), (1b) и (1c) хорошо известны [1, 2, 3, 4] и активно изучаются. Класс операторов со свойством (1d) выделяется, видимо, впервые. Соотношения между введенными классами указываются в следующем утверждении.

Theorem 1. *Справедливы импликации*

$$(1a) \to (1b) \to (1c) \to (1d),$$

где предполагается, что если оператор $A : X \to X^*$ обладает свойством, указанным у начала стрелки, то он обладает также свойством, стоящим у конца той же стрелки.

Остановимся подробнее на некоторых характерных свойствах предельно монотонных операторов. Одно из таких свойств достаточно очевидно и формулируется в следующем утверждении.

Theorem 2. *Пусть пространства X, X^* фиксированы, и пусть заданы предельно монотонные операторы $A_1, \dots, A_m$, действующие из X в X^*. Тогда для любого набора вещественных положительных чисел $c_1, \dots, c_m$ оператор*

$$A = c_1 A_1 + \dots + c_m A_m$$

является предельно монотонным.

Следующее свойство предельно монотонных операторов связано с галеркинскими приближениями. Пусть задан некоторый оператор $A : X \to X^*$. Рассмотрим уравнение $Au = f$, где $f \in X^*$. Предполагая пространство X сепарабельным, выделим в нем счетную систему линейно независимых элементов $e_1, e_2, \dots$, конечные линейные комбинации которых образуют плотное в X множество. Для каждого натурального $n = 1, 2, \dots$ ищем элемент $u_n = \sum_{k=1}^{n} c_{nk} e_k$, удовлетворяющий конечной системе алгебраических уравнений

$$(Au_n, e_m) = (f, e_m) \qquad (m = \overline{1, n}). \tag{1}$$

Допустим, что система (1) имеет решение u_n для каждого $n = 1, 2, \dots$, и пусть последовательность u_n слабо сходится в X : $u_n \rightharpoonup u$ $(n \to \infty)$. Это не гарантирует в общем случае регулярности последовательности Au_n, и даже если последовательность Au_n слабо сходится в X^*: $Au_n \rightharpoonup g$ $(n \to \infty)$, то элемент g не обязан совпадать с правой частью уравнения $Au = f$. На этом фоне выделяются предельно монотонные операторы, как это вытекает из следующего утверждения.

Theorem 3. *Пусть в приведенном выше построении галеркинских приближений для уравнения $Au = f$ справедливы сходимости при $n \to \infty$:*

$$u_n \rightharpoonup u \quad (\text{в } X), \qquad Au_n \rightharpoonup g \quad (\text{в } X^*).$$

Если оператор $A : X \to X^*$ является предельно монотонным, то $g = f$, т.е. $Au_n \rightharpoonup f$ $(n \to \infty)$ в X^*.

Доказательство. Фиксируем номер N и элемент $v = \sum_{k=1}^{N} \alpha_k e_k$. Для всех $n \geq N$ из системы (1) следуют равенства

$$(Au_n, u_n - v) = (f, u_n - v), \qquad n \geq N. \tag{2}$$

Так как $u_n \rightharpoonup u$ $(n \to \infty)$ в X, то из (2) получаем

$$\lim_{n\to\infty} (Au_n, u_n - v) = (f, u - v). \tag{3}$$

Используем очевидное тождество

$$(Au_n, u_n - v) = (Au_n, u_n - u) + (Au_n, u - v). \tag{4}$$

По условию $Au_n \rightharpoonup g$ $(n \to \infty)$ в X^*, и потому из (4) следует, что

$$\lim_{n\to\infty} (Au_n, u_n - v) = \lim_{n\to\infty} (Au_n, u_n - u) + (g, u - v). \tag{5}$$

Так как оператор A по условию предельно монотонен, то

$$\lim_{n\to\infty} (Au_n, u_n - u) \geq 0. \tag{6}$$

Объединяя соотношения (3), (5) и (6), приходим к неравенству

$$(g, u - v) \leq (f, u - v),$$

из которого с очевидностью следует, что $g = f$, так как множество элементов $v = \sum_{k=1}^{N} \alpha_k e_k$ плотно в X. Это доказывает теорему. $\square$

Как уже отмечалось, семейство операторов, близких к монотонным, довольно многочисленно. Приведем еще одну группу определений, объединяемых тем, что в них выражение $(Au_n, u_n - u)$ оценивается сверху.

Definition 2. Пусть X — вещественное сепарабельное банахово пространство с сопряженным X^*, и пусть задан оператор $A : X \to X^*$, а также слабо сходящаяся в X последовательность u_n, для которой при $n \to \infty$ выполнены соотношения:

$$u_n \rightharpoonup u \quad (\text{в } X), \qquad \limsup (Au_n, u_n - u) \leq 0. \tag{7}$$

При этих условиях оператор A называется:

(2a) *оператором, обладающим (S_+)-свойством*, если из (7) вытекает, что $u_n \to u$ $(n \to \infty)$, т.е. последовательность u_n сходится сильно в X;

(2b) *псевдомонотонным по Скрыпнику*, если из (7) вытекает, что при $n \to \infty$:

$$(2\text{b}_1) \quad \lim (Au_n, u_n - u) = 0,$$
$$(2\text{b}_2) \quad Au_n \rightharpoonup Au \quad (\text{в } X^*);$$

(2c) *псевдомонотонным по Брезису*, если из (7) вытекает, что при $n \to \infty$ для любого элемента $v \in X$

$$\liminf (Au_n, u_n - v) \geq (Au, u - v);$$

(2d) *условно слабо непрерывным* (т.е. слабо непрерывным на специальных последовательностях), если из (7) вытекает, что $Au_n \rightharpoonup Au$ $(n \to \infty)$ в X^*.

Классы операторов со свойствами (2a), (2b) и (2c) хорошо известны [1, 2]. Класс операторов со свойством (2d) выделен, видимо, впервые, хотя очевидно, что такое свойство удобно для перехода к пределу в галеркинских приближениях. Отметим еще, что псевдомонотонность по Скрыпнику из определения (2b) внешне существенно отличается от определения псевдомонотонности по Брезису. На этом фоне значительный интерес представляет следующее утверждение.

Theorem 4. *Пусть X — вещественное сепарабельное рефлексивное банахово пространство, и пусть оператор $A : X \to X^*$ ограничен. Такой оператор псевдомонотонен по Скрыпнику тогда и только тогда, когда он псевдомонотонен по Брезису, т.е. справедливы импликации:* (2b) $\rightleftarrows$ (2c).

Взаимосвязи представленных в определении 2 классов операторов довольно сложны, если не налагать дополнительных условий. Ситуация меняется, если предположить, что пространство X рефлексивно и оператор $A : X \to X^*$ ограничен и деминепрерывен. В этих условиях справедливо следующее утверждение.

Theorem 5. *Пусть X — вещественное сепарабельное рефлексивное банахово пространство, и пусть оператор $A : X \to X^*$ ограничен и деминепрерывен. Тогда справедливы следующие импликации:*

$$(2a) \to (2b) \rightleftarrows (2c) \to (2d).$$

Прежде чем связать операторы из определений 1 и 2, напомним еще одно определение.

Definition 3 ([1, замечание 2.1, §2 гл. 2; с. 184]). Оператор $A : X \to X^*$ обладает (M)-свойством, если из соотношений при $n \to \infty$:

$$u_n \rightharpoonup u \quad (\text{в } X); \qquad Au_n \rightharpoonup f \quad (\text{в } X^*); \qquad \limsup(Au_n, u_n) \le (f, u) \tag{8}$$

вытекает равенство $f = Au$.

Сделаем следующее замечание. Ограничимся для наглядности линейными непрерывными операторами в гильбертовом пространстве H, считая, что $H^* = H$. Можно сказать, что каждый такой оператор определен на всем пространстве H и принимает значения в сопряженном пространстве H^*. В частности к нему можно применить определение монотонности $(Au - Av, u - v) \ge 0$, что в силу линейности оператора равносильно соотношению $(Aw, w) \ge 0$, $w \in H$. Итак, если линейный оператор является монотонным, то он обязан быть неотрицательным. В противовес сказанному (M)-свойством обладают все линейные ограниченные операторы, действующие в гильбертовом пространстве. Действительно, пусть задан такой оператор $A : H \to H^*$. И пусть выполнены условия (8). Так как оператор A линеен и ограничен, то он слабо непрерывен, и потому $Au_n \rightharpoonup Au$ $(n \to \infty)$. Одновременно по условию (8) $Au_n \rightharpoonup f$ $(n \to \infty)$. Следовательно, $f = Au$, т.е. выполнено равенство, определяющее (M)-свойство, даже без использования последнего условия в (8). Итак, в гильбертовом пространстве (M)-свойством обладают все линейные ограниченные операторы, включая, например, отрицательные операторы. Приведенное рассуждение показывает, что операторы с (M)-свойством далеко отошли от монотонных операторов.

Определения 1–3 задают девять классов операторов, близких к монотонным. В теоремах 1 и 5 установлены связи между классами операторов внутри каждого из определений 1 и 2. Перекрестные соотношения между классами операторов из разных определений приводятся в следующем утверждении, где символом (M) обозначено (M)-свойство из определения 3.

Theorem 6. *Пусть X — вещественное сепарабельное рефлексивное банахово пространство, и пусть оператор $A : X \to X^*$ ограничен и деминепрерывен. Тогда справедлива следующая диаграмма импликаций:*

$$\text{(1a)} \begin{array}{c} \to \\ \to \end{array} \begin{array}{c} \text{(1b)} \to \text{(1c)} \\ \text{(2a)} \end{array} \begin{array}{c} \to \\ \to \end{array} \text{(2b)} \rightleftarrows \text{(2c)} \begin{array}{c} \to \\ \to \end{array} \begin{array}{l} \text{(1d)} \\ \text{(2d)} \rightleftarrows \text{(M)}. \end{array}$$

Здесь предполагается, что если оператор A обладает свойством, указанным у начала стрелки, то он обладает также свойством, стоящим у ее конца.

Согласно теореме 4 псевдомонотонные операторы по Скрыпнику и Брезису совпадают, если пространство X рефлексивно и оператор A ограничен. В частности, при указанных условиях можно говорить просто о псевдомонотонных операторах. Из диаграммы теоремы 6 следует, что каждый псевдомонотонный оператор является как предельно монотонным, так и условно слабо непрерывным. В следующем утверждении предлагается достаточно ясная характеристика псевдомонотонных операторов.

Theorem 7. *Пусть X — вещественное сепарабельное рефлексивное банахово пространство, и пусть оператор $A : X \to X^*$ ограничен и деминепрерывен. Такой оператор псевдомонотонен (эквивалентно по Скрыпнику или Брезису) тогда и только тогда, когда он является предельно монотонным и условно слабо непрерывным, т.е. справедливы импликации:*

$$(2\mathrm{b}) \rightleftarrows (2\mathrm{c}) \rightleftarrows \{(1\mathrm{d}) \text{ и } (2\mathrm{d})\}.$$

При условиях теоремы 7 свойства (2d) и (M) эквивалентны согласно диаграмме из теоремы 6. Поэтому теорему 7 можно высказать в такой форме.

Theorem 8. *При условиях теоремы 6 оператор $A : X \to X^*$ псевдомонотонен тогда и только тогда, когда он является предельно монотонным и обладает (M)-свойством, т.е. справедливы импликации:*

$$(2\mathrm{b}) \rightleftarrows (2\mathrm{c}) \rightleftarrows \{(1\mathrm{d}) \text{ и } (\mathrm{M})\}.$$

Хорошо известно [1, замечание 2.12, §2 гл. 2; с.201], что при условиях ограниченности и деминепрерывности сумма псевдомонотонного по Брезису оператора A и монотонного оператора B приводит к псевдомонотонному оператору $A + B$. В следующем утверждении доказывается, что псевдомонотонные операторы более устойчивы относительно сложения, именно, можно складывать два псевдомонотонных оператора, оставаясь в том же классе.

Theorem 9. *Пусть X — вещественное сепарабельное рефлексивное банахово пространство, и пусть операторы $A : X \to X^*$ и $B : X \to X^*$ ограничены, деминепрерывны и псевдомонотонны (эквивалентно по Скрыпнику или Брезису). Тогда оператор $(A + B) : X \to X^*$ ограничен, деминепрерывен и псевдомонотонен.*

Доказательство. Оператор $A + B$ ограничен и деминепрерывен как сумма двух операторов с теми же свойствами. Остается проверить его псевдомонотонность. Из двух эквивалентных определений используем определение псевдомонотонности по Скрыпнику, т.е. свойство (2b) определения 2. Пусть задана последовательность $u_n \in X$, для которой выполнены соотношения при $n \to \infty$:

$$u_n \rightharpoonup u \quad (\text{в } X); \qquad \limsup((A + B)u_n, u_n - u) \le 0, \tag{9}$$

или подробнее

$$\limsup[(Au_n, u_n - u) + (Bu_n, u_n - u)] \le 0. \tag{10}$$

Так как операторы A и B псевдомонотонны, то по теореме 7 каждый из них является предельно монотонным, т.е. справедливы соотношения при $n \to \infty$:

$$\liminf(Au_n, u_n - u) \ge 0; \qquad \liminf(Bu_n, u_n - u) \ge 0. \tag{11}$$

Из сравнения (10) и (11) следует, что при $n \to \infty$ определены пределы:

$$\lim(Au_n, u_n - u) = 0; \qquad \lim(Bu_n, u_n - u) = 0. \tag{12}$$

Действительно, допустим, что хотя бы одно из соотношений (12) неверно. Для определенности считаем, что $\limsup(Bu_n, u_n - u) = a \ne 0$. Из (11) следует, что $a > 0$. Выберем подпоследовательность $u_{n(1)}$, на которой достигается верхний предел, так что при $n(1) \to \infty$

$$\lim(Bu_{n(1)}, u_{n(1)} - u) = a > 0.$$

По свойствам верхнего предела из (10) следует, что при $n(1) \to \infty$

$$\limsup(Au_{n(1)}, u_{n(1)} - u) + a \leq 0.$$

Так как $a > 0$, то $\limsup(Au_{n(1)}, u_{n(1)} - u) < 0$. По условию оператор A псевдомонотонен по Скрыпнику, и потому из соотношений при $n(1) \to \infty$

$$u_{n(1)} \rightharpoonup u; \qquad \limsup(Au_{n(1)}, u_{n(1)} - u) < 0 \tag{13}$$

следует, что определен предел при $n(1) \to \infty$

$$\lim(Au_{n(1)}, u_{n(1)} - u) = 0,$$

а это соотношение противоречит (13). Итак, равенства (12) справедливы. Их достаточно, чтобы утверждать в соответствии с определением 2, что $Au_n \rightharpoonup Au$, $Bu_n \rightharpoonup Bu$ при $n \to \infty$. Отсюда и из (12) с очевидностью следуют соотношения:

$$(A+B)u_n \rightharpoonup (A+B)u; \qquad \lim_{n\to\infty}((A+B)u_n, u_n - u) = 0,$$

которые получены из (9) и показывают, что оператор $(A+B)$ является псевдомонотонным по Скрыпнику, что и утверждалось. $\square$

Укажем еще одно свойство, инвариантное относительно возмущений предельно монотонными операторами. Доказывается оно по аналогии с предыдущим утверждением.

Theorem 10. *Пусть X — вещественное сепарабельное рефлексивное банахово пространство, и пусть операторы $A : X \to X^*$ и $B : X \to X^*$ ограничены и деминепрерывны, причем, оператор A обладает (S_+)-свойством, а оператор B является предельно монотонным. Тогда оператор $A + B : X \to X^*$ является ограниченным деминепрерывным и обладает (S_+)-свойством.*

2. Разрешимость уравнений с предельно монотонными операторами

Если оператор $A : X \to X^*$ является ограниченным деминепрерывным и равномерно монотонным с функцией $\rho(s)$, для которой выполнено условие $s^{-1}\rho(s) \to \infty$ при $s \to \infty$, то этого достаточно, чтобы утверждать, что уравнение $Au = f$ имеет и притом единственное решение $u \in X$ для каждого элемента $f \in X^*$. Все остальные классы операторов, введенные в разделе 1, требуют дополнительных условий для разрешимости уравнения $Au = f$. Наиболее известно условие коэрцитивности, которое имеет вид

$$(Au, u) \geq \gamma(\|u\|)\|u\|, \tag{14}$$

где функция $\gamma(r) \to \infty$ при $r \to \infty$. Основная теорема о коэрцитивных операторах утверждает следующее [1, замечание 2.1, §2 гл. 2; с. 184]. Пусть X — вещественное сепарабельное рефлексивное банахово пространство, и пусть оператор $A : X \to X^*$ является ограниченным деминепрерывным коэрцитивным и обладает (M)-свойством. Тогда уравнение $Au = f$ имеет решение $u \in X$ для каждого элемента $f \in X^*$. Единственность решения не гарантируется. Обращаясь к диаграмме из теоремы 6, убеждаемся, что в сформулированном утверждении (M)-свойство оператора A можно заменить на одно из следующих: монотонность, полуограниченность вариации, (S_+)-свойство, псевдомонотонность (по Скрыпнику или по Брезису). Заменить (M)-свойство на предельную монотонность также возможно, но при дополнительном условии, которое определяется далее.

Definition 4. Оператор $A : X \to X^*$ называется усиленно замкнутым, если из условий $u_n \rightharpoonup u$ в X, $Au_n \to f$ $(n \to \infty)$ в X^* следует, что $Au = f$.

Theorem 11. *Пусть X — вещественное сепарабельное равномерно выпуклое банахово пространство со строго выпуклым сопряженным X^*, и пусть оператор $A : X \to X^*$ ограничен деминепрерывен коэрцитивен усиленно замкнут и является предельно монотонным. Тогда уравнение $Au = f$ имеет решение $u \in X$ для каждого элемента $f \in X^*$.*

Доказательство. Введем дуальный оператор $J : X \to X^*$, удовлетворяющий условиям

$$(Ju, u) = \|Ju\| \cdot \|u\|, \qquad \|Ju\| = \|u\|. \tag{15}$$

Условия на пространства X, X^* таковы, что оператор J определен однозначно, является ограниченным деминепрерывным монотонным и коэрцитивным. Убедимся, что предположение о равномерной выпуклости пространства X дает возможность утверждать, что оператор J обладает (S_+)-свойством. Действительно, пусть выполнены условия при $n \to \infty$:

$$u_n \rightharpoonup u \quad (\text{в } X), \qquad \limsup(Ju_n, u_n - u) \le 0.$$

Так как $(Ju, u_n - u) \to 0$ при $n \to \infty$, то по свойствам верхнего предела можно записать:

$$\limsup(Ju_n - Ju, u_n - u) \le 0. \tag{16}$$

Хорошо известно [5, замечание 1.4c), §1 гл. III; с. 81], что оператор J удовлетворяет следующему неравенству для любых $u, v \in X$:

$$(Ju - Jv, u - v) \ge (\|u\| - \|v\|)^2.$$

В частности, для введенной выше последовательности $u_n \rightharpoonup u$ имеем:

$$(\|u_n\| - \|u\|)^2 \le (Ju_n - Ju, u_n - u).$$

Соединив это неравенство с (16), получаем

$$\limsup(\|u_n\| - \|u\|)^2 \le 0,$$

откуда следует, что $\|u_n\| \to \|u\|$ при $n \to \infty$. Так как $u_n \rightharpoonup u$ в X и пространство X равномерно выпукло, то $u_n \to u$ в X. Это и означает, что оператор J обладает (S_+)-свойством. Очевидно, что оператор εJ также обладает (S_+)-свойством для всякого $\varepsilon > 0$. Так как оператор A по условию предельно монотонен, то по теореме 10 предыдущего раздела сумма $\varepsilon J + A$ определяет оператор, обладающий (S_+)-свойством. Из диаграммы теоремы 6 вытекает, что оператор $A + \varepsilon J$ обладает (M)-свойством. Очевидно также, что оператор $A + \varepsilon J$ ограничен деминепрерывен и коэрцитивен как сумма операторов с теми же свойствами. Этого достаточно, чтобы утверждать, что уравнение $(A + \varepsilon J)u^\varepsilon = f$ имеет решение $u^\varepsilon \in X$ для всех $\varepsilon > 0$ и любого $f \in X^*$. Представленное уравнение умножим на u^ε:

$$(Au^\varepsilon, u^\varepsilon) + \varepsilon(Ju^\varepsilon, u^\varepsilon) = (f, u^\varepsilon).$$

Отсюда следует, с учетом равенств (15), что

$$\frac{(Au^\varepsilon, u^\varepsilon)}{\|u^\varepsilon\|} \le \frac{(Au^\varepsilon, u^\varepsilon)}{\|u^\varepsilon\|} + \varepsilon\|u^\varepsilon\| \le \|f\|.$$

Так как оператор A коэрцитивен, то найдется постоянная C такая, что $\|u^\varepsilon\| \le C$ независимо от $\varepsilon > 0$. В силу ограниченности оператора J найдется постоянная C_1 такая, что $\|Ju^\varepsilon\| \le C_1$ независимо от $\varepsilon > 0$. Отсюда следует, что $\varepsilon Ju^\varepsilon \to 0$ при $\varepsilon \to 0$, а также

$$Au^\varepsilon = f - \varepsilon Ju^\varepsilon \to f \qquad (\varepsilon \to 0).$$

Пространство X равномерно выпукло и потому рефлексивно, значит, из ограниченного множества $\{u^\varepsilon, \varepsilon > 0\}$ можно выбрать слабо сходящуюся последовательность $u^{\varepsilon_k} \rightharpoonup u$ при $\varepsilon_k \to 0$. Для выбранной последовательности выполняются следующие соотношения при $\varepsilon_k \to 0$:

$$u^{\varepsilon_k} \rightharpoonup u \quad (\text{в } X), \qquad Au^{\varepsilon_k} \to f \quad (\text{в } X^*).$$

Так как оператор A по условию усиленно замкнут, то $Au = f$, что завершает доказательство теоремы. □

Кроме коэрцитивности известны и другие условия, достаточные для разрешимости уравнения $Au = f$. Приведем одно из них.

Definition 5. Оператор $A : X \to X^*$ назовем ослабленно коэрцитивным, если

$$\|Au\| + \frac{(Au, u)}{\|u\|} \to \infty \qquad (\|u\| \to \infty).$$

Известно [2, теорема 7.2, §7 гл. 2; с. 79], что условия ослабленной коэрцитивности достаточно для разрешимости уравнения $Au = f$, если оператор A обладает (S_+)-свойством. В следующем утверждении класс операторов с (S_+)-свойством расширяется до класса предельно монотонных операторов. Доказывается это утверждение по аналогии с теоремой 11, хотя и требует более специальных построений.

Theorem 12. *Пусть X — вещественное сепарабельное равномерно выпуклое банахово пространство со строго выпуклым сопряженным X^*, и пусть оператор $A : X \to X^*$ ограничен деминепрерывен ослабленно коэрцитивен и является предельно монотонным и усиленно замкнутым. Тогда уравнение $Au = f$ имеет решение $u \in X$ для любого элемента $f \in X^*$.*

Напомним еще одно утверждение, принадлежащее С.И. Похожаеву [13] и детально изложенное в монографии [2, следствие 5.1, §5 гл. 1; с. 31]. Пусть X — вещественное сепарабельное рефлексивное банахово пространство, и пусть оператор $A : X \to X^*$ ограничен деминепрерывен обладает (S_+)-свойством, является нечетным и удовлетворяет условию возрастания: $\|Au\| \to \infty$ при $\|u\| \to \infty$. Тогда уравнение $Au = f$ имеет решение $u \in X$ для всякого элемента $f \in X^*$. Убедимся, что класс операторов можно расширить до класса предельно монотонных, дополнив требования на оператор A усиленной замкнутостью.

Theorem 13. *Пусть X — вещественное сепарабельное рефлексивное банахово пространство со строго выпуклым сопряженным, и пусть оператор $A : X \to X^*$ ограничен деминепрерывен нечетен усиленно замкнут, является предельно монотонным и удовлетворяет условию возрастания: $\|Au\| \to \infty$ при $\|u\| \to \infty$. Тогда уравнение $Au = f$ имеет решение $u \in X$ для каждого элемента $f \in X^*$.*

Доказательство. По оператору A введем числовую функцию

$$\varphi(r) = \inf_{\|u\|=r} \|Au\|.$$

Очевидно, что $\varphi(r)$ определена для всех $r \geq 0$ и является неотрицательной. Из условия теоремы следует, что $\varphi(r) \to \infty$ при $r \to \infty$. Построим непрерывную строго монотонно возрастающую функцию $\Phi(r)$, удовлетворяющую условиям: $\Phi(0) = 0$, $\Phi(r) \to \infty$ при $r \to \infty$, $\Phi(r) \leq \varphi(r)$ для достаточно больших r. Условия на пространства X и X^* дают возможность ввести отображение двойственности $J : X \to X^*$ относительно функции Φ. Это отображение обладает следующими свойствами: оно однозначно определено, является ограниченным деминепрерывным монотонным коэрцитивным и удовлетворяет равенствам

$$(Ju, u) = \|Ju\| \cdot \|u\|, \qquad \|Ju\| = \Phi(\|u\|).$$

Для каждого числа $\varepsilon > 0$ введем оператор $A_\varepsilon = A + \varepsilon J$. Он действует из X в X^*, ограничен и деминепрерывен как сумма операторов с теми же свойствами. Убедимся, что он является нечетным. Для этого достаточно доказать, что нечетным является оператор двойственности J. Напомним его определение [1, предложение 2.3, §2 гл. 2; с. 187]. Пусть

$S = \{u \in X : \|u\| = 1\}$. Для каждого элемента $u \in S$ строим функционал $f \in X^*$ со свойствами:

$$(f, u) = 1, \qquad \|f\| = 1.$$

Такой функционал определен для любого банахова пространства, а условие строгой выпуклости пространства X^* обеспечивает единственность такого функционала. На луче λu, $\lambda > 0$, оператор J определяется равенством $J(\lambda u) = \Phi(\lambda) f$. Если ввести элементы $v = -u$, $g = -f$, то очевидно, что $(g, v) = (f, u) = 1$ и $\|g\| = \|f\| = 1$. Следовательно, $J(\lambda v) = \Phi(\lambda) g$, т.е. $J(-\lambda u) = -\Phi(\lambda) f = -J(\lambda u)$, что и доказывает нечетность оператора двойственности. Отсюда следует, что оператор $A_\varepsilon = A + \varepsilon J$ также является нечетным. Кроме того, он обладает (S_+)-свойством как сумма оператора A с (S_+)-свойством и монотонного оператора εJ (теорема 10 раздела 1). Нетрудно видеть также, что оператор $A + \varepsilon J$ удовлетворяет условию возрастания: $\|(A + \varepsilon J)u\| \to \infty$ для $\|u\| \to \infty$, если $0 < \varepsilon < 1/2$. Представленных свойств оператора A_ε достаточно, чтобы применить теорему Похожаева, которая утверждает, что уравнение $A_\varepsilon u^\varepsilon = f$ имеет решение $u^\varepsilon \in X$ для каждого элемента $f \in X^*$ и любого $\varepsilon \in (0, 1/2]$.

Запишем уравнение $A_\varepsilon u^\varepsilon = f$ как тождество $Au^\varepsilon = f - \varepsilon J u^\varepsilon$, из которого следует, что

$$\|Au^\varepsilon\| \le \|f\| + \varepsilon \|Ju^\varepsilon\|. \tag{17}$$

Согласно построению функций φ и Φ существует число R_0 такое, что если $\|u^\varepsilon\| \ge R_0$, то справедливы неравенства $\Phi(\|u^\varepsilon\|) \le \varphi(\|u^\varepsilon\|)$ и $\varphi(\|u^\varepsilon\|) \le \|Au^\varepsilon\|$. Используя также равенства $\|Ju^\varepsilon\| = \Phi(\|u^\varepsilon\|)$ и подставляя все приведенные соотношения в (17), приходим к оценке

$$\Phi(\|u^\varepsilon\|) \le \|f\| + \varepsilon \Phi(\|u^\varepsilon\|), \qquad \|u^\varepsilon\| \ge R_0,$$

из которой следует, что для всех $\varepsilon \in (0, 1/2]$ существует константа C такая, что $\|u^\varepsilon\| \le C$. Далее можно применить рассуждения из доказательства теоремы 11, которые приводят к существованию элемента $u \in X$, удовлетворяющего равенству $Au = f$, что и доказывает утверждение. □

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, проекты 01-01-00884 и 99-01-00045.

Список литературы

[1] Лионс Ж.-Л. *Некоторые методы решения нелинейных краевых задач.* М.: Мир. — 1972. — 588 с.

[2] Скрыпник И. В. *Методы исследования нелинейных эллиптических граничных задач.* М.: Наука. — 1990. — 448 с.

[3] Дубинский Ю. А. *Нелинейные эллиптические и параболические уравнения* //Современные проблемы математики. М.: ВИНИТИ. — 1976. — Т. 9. — С. 5–130.

[4] Дубинский Ю. А. *Нелинейные параболические уравнения высокого порядка* //Современные проблемы математики. М.: ВИНИТИ. — 1990. — Т. 37. — С. 89–166.

[5] Гаевский Х., Грегер К., Захариас К. *Нелинейные операторные уравнения и операторные дифференциальные уравнения.* М.: Наука. — 1978. — 336 с.

[6] Showalter R. E. *Monotone operators in Banach space and nonlinear partial differential equations.* Providence: AMS. — 1997. — 278 p.

[7] Мельник В. С., Згуровский М. З. *Нелинейный анализ и управление бесконечномерными системами.* Киев: Наукова думка. — 1999. — 575 с.

[8] Лаптев Г. И. *Об одной регуляризации слабо нелинейных эллиптических уравнений второго порядка с неявным вырождением* //Мат. заметки. — 1994. — Т. 55. — С. 84–95.

[9] Лаптев Г. И. *Первая краевая задача для квазилинейных эллиптических уравнений второго порядка с двойным вырождением* //Дифференц. уравнения. — 1994. — Т. 30. — С. 1057–1069.

[10] Лаптев Г. И. *Слабые решения квазилинейных параболических уравнений второго порядка с двойной нелинейностью* //Мат. сб. — 1997. — Т. 188. — С. 83–112.

[11] Лаптев Г. И. *Разрешимость квазилинейных параболических уравнений второго порядка с двойным вырождением* //Сибирский мат. журнал. — 1997. — Т. 38. — С. 1335–1355.

[12] Лаптев Г. И. *Эволюционные уравнения с монотонным оператором и функциональной нелинейностью при производной по времени* //Мат. сб. — 2000. — Т. 191. — С. 43–64.

[13] Похожаев С. И. *О разрешимости нелинейных уравнений с нечетными операторами* //Функцион. анализ и его прил. — 1967. — Т. 1. — С. 66–73.

Поступила в редакцию 28.09.2001