Ученые записки Таврического национального университета им. В. И. Вернадского

Серия "Математика. Механика. Информатика и Кибернетика"N 1 (2002) 44 – 47

УДК 517.98

А. С. Костенко

ОБ ИНДЕКСЕ НЕУСТОЙЧИВОСТИ КВАДРАТИЧНЫХ САМОСОПРЯЖЕННЫХ ОПЕРАТОРНЫХ ПУЧКОВ

Keywords: самосопряженный оператор, спектр, операторный пучок

Исследуется квадратичные операторные пучки с самосопряженными коэффициентами. Для пучка С. Г. Крейна, при дополнительных условиях на его коэффициенты, найдена формула для индекса неустойчивости, а также исследуется э-дихотомичность пучка.

Пусть H– сепарабельное гильбертово пространство.

В книге Копачевского Н.Д., Крейна С.Г. и Нго Зуй Кана [2] при изучении задачи о конвекции в сосуде, частично заполненном жидкостью, исследуются спектральные свойства пучка С.Г.Крейна, то есть пучка вида

$$L(\lambda) = \lambda A + \frac{1}{\lambda} B + \varepsilon K - I \ . \tag{1}$$

В [2] предполагалось, что A и B–неотрицательные компактные операторы, $K = K^*$ компактный оператор в H, а ε–положительный параметр.

Напомним, что точка $\lambda_0 \in \mathbb{C}$ называется собственным значением пучка L, если найдется ненулевой вектор $x_0 \in H$ такой, что $L(\lambda_0)x_0 = 0$.

В [2] показано, что собственные значения пучка L,которые отвечают нормальным движениям вида $exp(-\lambda x)$, находятся в правой полуплоскости, если $\varepsilon < \frac{1}{\|K\|}$.

В случае, когда $\varepsilon > \frac{1}{\|K\|}$, оператор $I - \varepsilon K$ может иметь конечное число κ отрицательных собственых значений. В этом случае, спектр задачи уже не обязательно лежит в правой полуплоскости $\mathbb{C}_r$. А именно, оказывается, что в левой полуплоскости $\mathbb{C}_l$ может возникать не более конечного числа собственных значений. Это факт означает неустойчивость нормальных колебаний.

Напомним, что количество собственных значений пучка L, расположенных в левой полуплоскости $\mathbb{C}_l$, называется индексом неустойчивости пучка L и обозначается $\kappa_-(L)$.

В статье Копачевского Н.Д. и Пивоварчика В.Н.([3]) было получено достаточное условие неустойчивости нормальных конвективных движений, то есть указано число ε_2, определяемое операторами A, B и K (причем $\ker B \neq \{0\}$), такое, что при $\varepsilon > \varepsilon_2$ индекс неустойчивости $\kappa_-(L) > 0$.

В работах Шкаликова А.А. [5] и [6] исследовался операторный пучок вида

$$L(\lambda) = F\lambda^2 + (D + iG)\lambda + T,$$

где F, D, G, T – операторы в гильбертовом пространстве H, для которых выполнены следующие условия: $F = F^*$ – ограничен и ограниченно обратим, $T = T^*$ – ограниченно обратим, D и G – T–ограниченные симметрические плотно определенные операторы, причем $D \geq 0$. Для таких пучков в [5] и [6], при дополнительных условиях на операторы F и T, получены оценки сверху для индекса неустойчивости $\kappa_-(L)$.

Наиболее близкой к настоящей статье является работа Сухочевой Л.И.([4]). Именно, в ней были получены достаточные условия на коэффициенты матричных пучков вида

$$L(\lambda) = \lambda A + \frac{1}{\lambda} B - C \ , \tag{2}$$

обепечивающие равенство $\kappa_-(L) = 2\kappa$. Здесь A, B, C – эрмитовы матрицы, действующие в пространстве $H = \mathbb{C}^n$ и удовлетворяющие следующим условиям:

$$A = \|a_{ij}\|_{i,j=1,2,\ldots,n} \ , \quad A > 0 \ , \quad a_{ii} > \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} |a_{ij}| + \varepsilon_i^A \ , \quad \varepsilon_i^A \geq 0 \ , \tag{3}$$

$$B = \|b_{ij}\|_{i,j=1,2,\ldots,n} \ , \quad B > 0 \ , \quad b_{ii} > \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} |b_{ij}| + \varepsilon_i^B \ , \quad \varepsilon_i^B \geq 0, \tag{4}$$

$$C = J_\kappa = diag(I_{n-\kappa}, -I_\kappa) \ . \tag{5}$$

Теорема 1. [4] *Пусть эрмитовы матрицы A, B и C удовлетворяют условиям* (3) ,(4), (5) *и определяют матричный пучок вида* (2). *Если спектр пучка $L_d(\lambda)$ содержится в угле:*

$$\Phi = \cap_{i=1}^n \{\Psi_i : |\tan \Psi_i| \leq 2(\varepsilon_i^A \varepsilon_i^B)^{1/2}\}, \tag{6}$$

то 2κ собственных значений пучка L лежат в открытой левой полуплоскости, а $2(n-\kappa)$ – в открытой правой полуплоскости.

Здесь L_d – диагональ пучка L :

$$L_d(\lambda) = \lambda \operatorname{diag} A + \frac{1}{\lambda} \operatorname{diag} B - J_\kappa \ ,$$

где $\operatorname{diag} A$ – это матрица, полученная из матрицы A "обнулением"ее внедиагональных элементов.

Будем придерживаться следующих обозначений:

$\mathbb{C}_l$ ($\mathbb{C}_r$) - открытая левая (правая) полуплоскость,

$\kappa_-(A)$($\kappa_-(L)$) – количество собственных значений оператора A (пучка L), находящихся в $\mathbb{C}_l$.

В настоящей работе, находятся простые достаточные условия, обеспечивающие равенство $\kappa_-(L) = 2\kappa$, а также э–дихотомичность пучка вида

$$L(\lambda) = \lambda^2 A - \lambda C + B. \tag{7}$$

При этом наш подход отличен от подходов применявшихся в перечисленных работах [2], [3], [4], [5] и [6].

Напомним некоторые определения (см., например, [1]). Оператор A называют положительно определенным, если существует $\delta > 0$ такое, что $(Af, f) > \delta(f, f)$, $\forall f \in H$. Если $\delta = 0$, то оператор называют положительным. Оператор (пучок) называют э–дихотомическим, если его спектр не пересекается с мнимой осью.

Следующая теорема – основной результат заметки.

Теорема 2. *Пусть A, B и C – ограниченные самосопряженные операторы в гильбертовом пространстве H, а L – квадратичный пучок вида* (7). *Пусть также операторы A, B положительно определены, а C – обратим и $\kappa_-(C) = \kappa$. Если оператор*

$$R_0 := CA^{-1}C - B \tag{8}$$

положительно определен, то пучок L является э–дихотомическим и $\kappa_-(L) = 2\kappa$.

В следующей теореме мы покажем, что в теореме 2 можно отказаться от положительной определенности оператора A, заменив подходящим образом условие положительной определенности оператора R_0 вида (8).

Теорема 3. *Пусть A, B, C – ограниченные самосопряженные операторы, определяющие пучок вида (7), удовлетворяют следующим условиям: A – положительный, B – положительно определен, а C – обратим и $\kappa_-(C) = \kappa$. Если при некотором $\varepsilon_0 > 0$ операторы*

$$R_\varepsilon := C(A + \varepsilon I)^{-1}C - B, \ (\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)) \tag{9}$$

положительно определены, то пучок L является э-дихотомическим и $\kappa_-(L) = 2\kappa$.

Следствие 1. *Пусть A, B, C – ограниченные операторы, действующие в гильбертовом пространстве H, и L – квадратичный пучок вида (7). Пусть также выполнены условия: C – обратим, $A = A^* > 0, B = B^* > \delta I > 0$. Если $\kappa_-(C) = \kappa$ и*

$$\|A\| \cdot \|B\| \cdot \|C^{-1}\|^2 < 1 \ , \tag{10}$$

то $\kappa_-(L) = 2\kappa$.

Замечание 6. Пусть выполнены все условия теоремы 2, но оператор A положительно определен, а B является положительным, тогда теорема 2 остается справедливой, только пучок L перестает быть э–дихотомическим (так как $L(0) = B$, а этот оператор не обратим).

Пример 3. $H = \mathbb{C}^2, B = diag(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}), J = diag(1, -1)$,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 \\ 1/2 & 1 \end{pmatrix} .$$

Легко видеть, что $\|A\| = 1,5$, $\|B\| = 0,5$, следовательно $\|A\| \cdot \|B\| < 1$ Таким образом, применяя следствие 1, получим $\kappa_-(L) = 2$.

Проверим условия теоремы 1. Ясно, что $\sigma(L_d) = \{(1 \pm i)/2; (-1 \pm i\sqrt{3})/2\}$ и $\Phi = \{\phi : |\tan \phi| < \sqrt{\frac{2}{3}}\}$.

Легко видеть, что теорема 1 из [6] не применима, так как $(1 + i)/2 \notin \Phi$.

Пример 4. $H = \mathbb{C}^2, B = I, J = diag(1, -1)$,

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} .$$

Легко видеть, что $det(A) = 8$ и

$$R_0 = \begin{pmatrix} -5/8 & 1/8 \\ 1/8 & -5/8 \end{pmatrix} .$$

Таким образом, оператор R_0 не является положительно определенным, а значит теорема 2 не применима.

В то же время $\sigma(L_d) = \{(1 \pm i\sqrt{11})/6; (-1 \pm i\sqrt{11})/6\}$.

$\Phi = \{\phi : |\tan \phi| < \sqrt{11, 6}\}$.

Легко видеть, что $\sigma(L_d) \subset \Phi$ и, значит, по теореме 1 $\kappa_-(L) = 2$.

Приведенные примеры показывают, что теорема 2 не покрывает теорему 1. В то же время она справедлива для операторных (а не только матричных) пучков, а ее условия, в отличие от условий теоремы 1, являются унитарно инвариантными.

Автор выражает искреннюю благодарность М.М. Маламуду за руководство работой, а также С.М. Маламуду и Л.Л. Оридороге за многочисленные полезные обсуждения.

Список литературы

[1] Далецкий Ю. Л., Крейн М. Г. *Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве.* – М.: Наука, 1970. – 536 стр.

[2] Копачевский Н. Д., Крейн С. Г., Нго Зуй Кан. *Операторные методы в линейной гидродинамике.* – М.: Наука, 1989.

[3] Копачевский Н.Д., Пивоварчик В.Н. *О достаточном условии неустойчивости конвективных движений жидкости в открытом сосуде.*// Ж. вычисл. матем. и матем. физ.—1993.—Т.33,—№ 1.—стр. 101–118.

[4] Сухочёва Л. И. *О некоторых свойствах квадратичного самосопряженного пучка матриц с доминирующими диагоналями* // Матем. заметки. —1997.—Т.61.—Вып.3.—стр. 381–390.

[5] Шкаликов А. А. *Формула индекса неустойчивости для уравнений с диссипацией* // Успехи матем. наук.—1996.—Т.51.—№ 5.,—стр.195–196.

[6] Shkalikov A. A. *Operator pencils arising in alastisity and hydrodinamics. Instability index formula* // In book:Operator Theory Advances and Appl. // Vol.87,—1996.—Bikhauser Verlag,—p.258–285.

Поступила в редакцию 13.03.2002