Ученые записки Таврического национального университета им. В. И. Вернадского

Серия "Математика. Механика. Информатика и Кибернетика"N 1 (2002) 125 – 132

УДК 517.95

А. П. Хромов [4]

О РАВНОСХОДИМОСТИ РАЗЛОЖЕНИЙ ПО СОБСТВЕННЫМ ФУНКЦИЯМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ, ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ И ИНТЕГРАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ

Keywords: Интегральный оператор, условия регулярности, ряд Фурье

В статье приводится обзор результатов по равносходимости разложений по собственным функциям дифференциальных, интегро-дифференциальных, интегральных операторов и разложений в тригонометрический ряд Фурье, полученных методом контурного интегрирования Коши-Пуанкаре и выполненных в основном в Саратовском университете.

Впервые теорема равносходимости разложений по собственным функциям и разложений в обычные тригонометрические ряды Фурье была установлена в работах В.А.Стеклова [1], Е.В.Гобсона [2] и А.Хаара [3] для оператора Штурма-Лиувилля. Затем, Я.Д.Тамаркин и М.Н.Стоун [5] распространили этот результат на произвольный дифференциальный оператор:

$$l[y] = y^{(n)} + \sum_{k=0}^{n-2} p_k(x)y^{(k)}, \quad p_k(x) \in L[0,1] \tag{1}$$

с произвольными краевыми условиями:

$$U_j(y) = \sum_{k=0}^{n-1}[a_{jk}y^{(k)}(0) + b_{jk}y^{(k)}(1)] = 0 \quad (j = 1, \ldots, n), \tag{2}$$

удовлетворяющими условию регулярности Биркгофа ([6], с.66-67), которые заключаются в отличии от нуля некоторых определителей, составленных из коэффициентов при старших производных в $U_j(y)$ (после приведения их к нормированному виду ([6], с.65-66)). Дадим формулировку этого результата.

Теорема 1. *Для любой функции $f(x) \in L[0,1]$ имеет место*

$$\lim_{r\to 0} \|S_r(f,x) - \sigma_r(f,x)\|_{C[\delta,1-\delta]} = 0, \tag{3}$$

где δ – любое число из $\left(0, \frac{1}{2}\right)$, $S_r(f,x)$ – частичная сумма ряда Фурье по собственным и присоединенным фукнкциям (с.п.ф.) оператора (1)-(2) для тех собственных значений, для которых $|\lambda_k| < r^n$, $\sigma_r(f,r)$ – частичная сумма тригонометрического ряда Фурье для тех k, для которых $k\pi < r$.

[4]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, проект № 00-01-00075, программы "Ведущие научные школы", проект № 00-15-96123, программы Минобразования "Университеты России", проект N 990189

Условия регулярности снять, вообще говоря, нельзя [7].

Этот результат породил и по настоящее время интенсивно развивающееся направление. Достаточно отметить многочисленные работы В.А.Ильина (основополагающие статьи [8]-[10]), разработавшему метод лиувиллевского типа получения теорем равносходимости, когда дифференциальный оператор не привязывается к граничным условиям, а лишь используется дополнительная информация о поведении собственных значений и собственных функций и этот метод приводит часто к результатам окончательного характера, и исследования А.М.Седлецкого (см., например, [11]) об операторе дифференцирования с размазанными граничными условиями.

1. С точки зрения интегральных операторов теорема 1 дает равносходимость спектральных разложений для операторов вида:

$$Af = \int_0^1 A(x,t)f(t)dt, \tag{4}$$

когда $A(x,t)$ является функцией Грина дифференциальных операторов. Для интегральных операторов общего вида вопрос о равносходимости исследовался впервые, повидимому, автором ([12],[13]). Мы будем предполагать, что ядро $A(x,t)$ удовлетворяет следующим требованиям:

а) $A_{x^s t^j}(x,t) = \frac{\partial^{s+j}}{\partial x^s \partial t^j} A(x,t)$ $(s,j=0,\ldots,n)$ непрерывны при $t \le x$ и $t \ge x$,

б) A^{-1} существует,

в) $\Delta A_{x^s}(x,t)_{|t=x} = A_{x^s}(x,t)_{|t=x-0} - A_{x^s}(x,t)_{|t=x+0} = \delta_{s,n-1}$ $(s=0,\ldots,n,$ δ_{sk} – символ Кронекера).

Проанализируем эти требования. Условие а), как показывают примеры, ослабить нельзя. Условие б) необходимо для справедливости (3). Условию в) удовлетворяют ядра $A(x,t)$, являющиеся функциями Грина оператора (1)-(2), и относительно его важности сформулируем следующий результат.

Теорема 2. *([13]). Пусть $S_r(f,x)$ – частичная сумма ряда Фурье по с.п.ф. оператора (4) и для любой $f(x) \in L[0,1]$ выполняются соотношения:*

$$\lim_{r\to\infty} \left\| \frac{1}{r^s} \frac{d^s}{dx^s} (S_r(f,x) - \sigma_r(f,x)) \right\|_{C[\delta,1-\delta]} = 0, \quad (s=0,1).$$

Тогда существует интегральный оператор $Bf = \int_0^1 B(x,t)f(t)dt$ с теми же с.п.ф., что и у оператора (4), ядро $B(x,t)$ которого непрерывно по x и t из $[0,1]$, непрерывно диффференцируемо по x из $(0,1)$ и $x \ne t$ и выполняется в) *при $x \in (0,1)$, $s=0,1$ и $n=2$.*

Теорема 3. *([13]). Если выполняются условия* а),б),в), *то*

$$A^{-1}y = (E+N)(y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \cdots + a_n y), \tag{5}$$

$$U_j(y) = (y,\varphi_j) \quad (j=1,\ldots,n), \tag{6}$$

где E – единичный оператор, N – интегральный оператор $Nf = \int_0^1 N(x,t)f(t)dt$ с непрерывным при $t \le x$ и $t \ge x$ ядром $N(x,t)$ (на линии $t=x$ возможен разрыв первого рода), $a_1,\ldots,a_n$ – константы, $U_j(y)$ те же, что и в (2), $(y,\varphi_j) = \int_0^1 y(x)\varphi_j(x)dx$ и $\varphi_j(x) \in C[0,1]$.

Теорема 3 сводит задачу разложения по с.п.ф. интегрального оператора (4) к этой задаче для интегро-дифференциального оператора (5)-(6). В предположении, что $U_j(y)$

($j = 1, \dots, n$) регулярны, (5) можно привести к виду, когда $a_1 = \dots = a_{n-1} = 0$, т.е., $A^{-1}y$ имеет вид:

$$A^{-1}y = (E + N)(y^{(n)} + \alpha y). \tag{7}$$

Теорема 4. *([13]). Пусть выполняются требования:*

1) *$N(x,t)$ непрерывна в $[0,1] \times [0,1]$ и $N'_t(x,t)$ непрерывна при $t \le x$ и $t \ge x$,*
2) *линейные формы $U_j(y)$ ($j = 1, \dots, n$) в (2) регулярны,*
3) *$N(x,0)$ и $N(x,1)$ – непрерывные функции ограниченной вариации.*

Тогда для оператора (6)-(7) *справедливо* (3).

Для оператора (4) теорема 4 приводит к следующему результату.

Теорема 5. *([13]). Предположим, что:*

1) *интегральный оператор A удовлетворяет условиям а), б), в),*
2) *$U_j(y)$ ($j = 1, \dots, n$) регулярны,*
3) *$\overset{1}{\underset{0}{V}}\underset{x}{ar}\, A_{x^n}(x,t)$ ограничена по t.*

Тогда для оператора (4) *справедливо* (3).

На примерах показано ([13]), что ослабить условия теорем 4 и 5 нельзя.

Недостатком теоремы 5 является трудно проверяемое условие 2). Укажем случай, когда его можно убрать.

Теорема 6. *([?]). Если оператор* (4) *удовлетворяет условиям* 1), 3) *теоремы 5 и еще $A(x,t) = \overline{A(t,x)}$, то для него справедливо* (3).

При получении этого факта важную роль играет

Теорема 7. *([?]). Пусть L – дифференциальный оператор*

$$Ly = y^{(n)} + \sum_{k=0}^{n-1} p_k(x) y^{(k)}, \quad p_k(x) \in C^k[0,1]$$

с нормированными краевыми условиями: $U_j(y) = 0$ ($j = 1, \dots, n$). Пусть $V_j(y) = 0$ ($j = 1, \dots, n$) нормированные краевые условия сопряженного оператора L^*. Если части $U_j(y)$ и $V_j(y)$, содержащие старшие производные, совпадают, то $U_j(y)$ ($j = 1, \dots, n$) регулярны.

Эта теорема дает положительный ответ на обобщенную гипотезу Камке. Гипотеза Камке состояла в утверждении регулярности самосопряженных краевых условий. Ее положительное решение дано С.Салафом [14] и А.М.Минкиным [15].

В работе [16] Б.В.Пальцев исследовал интегральные операторы (4), когда $A(x,t) = A(x-t)$ и $A(x)$ является преобразованием Фурье рациональной функции, т.е.,

$$A(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P(z)}{Q(z)} \exp(-ixz)dz,$$

где $P(z)$ и $Q(z)$ – полиномы степеней p и q ($p < q$) со старшими кэффициентами, равными 1. Были введены условия, аналогичные условиям регулярности, найдены асимптотики характеристических чисел, собственных функций, исследовалась сходимость спектральных разложений в $L_p[0,1]$. Л.Г.Назаровым [17] было показано, что операторы Б.В.Пальцева являются частным случаем операторов, рассмотренных выше, и условия регулярности Б.В.Пальцева переходят в условия регулярности Биркгофа и тем самым теорема равносходимости переносится и на такие операторы. Выделим еще частный случай оператора Б.В.Пальцева, когда теорема равносходимости формулируется особенно просто.

Теорема 8. ([13]). *Обозначими через q^+ (q^-) число корней многочлена $Q(z)$ в верхней (нижней) полуплоскости. Тогда, если $q-p \geq \max\{q^+, q^-\}$, многочлен $P(t)\overline{Q}(t)$ ($t \in (-\infty, \infty)$) имеет вещественные коэффициенты, то для оператора $A_1 f = \int\limits_0^1 A_1(x-t)f(t)dt$, где $A_1(x) = \frac{(-1)^n}{2\pi} A(x)\exp\vartheta x$, где $\vartheta = \frac{i}{n}(a-b)$, $n = q-p$, a (b) – коэффициент при z^{p-1} (z^{q-1}) многочлена $P(z)$ ($Q(z)$), то справедливо* (3).

Начиная с 1998 года (см. [18]), стали исследоваться интегральные операторы, ядра которых имеют скачки $(n-1)$-ой производной не только на линии $t = x$, но и $t = 1-x$. Мы их рассматриваем в виде:

$$\begin{aligned} Af =& \alpha_1 \int\limits_0^x A_1(x,t)f(t)\,dt + \alpha_2 \int\limits_x^1 A_2(x,t)f(t)\,dt + \\ &+ \alpha_3 \int\limits_0^{1-x} A_3(1-x,t)f(t)\,dt + \alpha_4 \int\limits_{1-x}^1 A_4(1-x,t)f(t)\,dt, \end{aligned} \tag{8}$$

где α_i – константы и

$$\frac{\partial^s}{\partial x^s} A_j(x,t)_{|t=x} = \delta_{s,n-1} \quad (s = 0, \ldots, n). \tag{9}$$

Теорема 9. *Пусть $\delta = (\alpha_1 - \alpha_2)^2 - (\alpha_3 - \alpha_4)^2 \neq 0$ и A^{-1} существует. Тогда*

$$A^{-1}y = (E+N)P(y^{(n)}(x) + \alpha y(x))$$

с краевыми условиями (6). *Здесь α – комплексное число и $Pf = \delta^{-1}[(\alpha_1 - \alpha_2)f(x) + (\alpha_3 - \alpha_4)f(1-x)]$.*

При $n = 1$ эта теорема получена в [18] и при произвольном n Е.В.Назаровой [19] и тем самым открывается возможность получения теоремы типа теоремы 4.

Отметим следующий важный случай оператора (8):

$$Af = \alpha \int\limits_0^x A(x,t)f(t)dt + \int\limits_0^{1-x} A(1-x,t)f(t)dt, \quad \alpha^2 \neq 1. \tag{10}$$

Теорема 10. *Если ядро $A(x,t)$ в* (10) *n раз непрерывно дифференцируемо по x, один раз по t и выполняется* (9), *то для всякой $f(x) \in L[0,1]$ имеет место соотношение:*

$$\lim_{r\to\infty} \left\| S_r(f,x) - \frac{1}{2}\sigma_{r|\alpha+1|}(f+g,x) - \frac{1}{2}\sigma_{r|\alpha-1|}(f-g,x) \right\|_{C[\delta,1-\delta]} = 0,$$

где $g(x) = f(1-x)$.

Этот результат получен недавно автором совместно с В.В.Корневым.

2. Остановимся теперь на дифференциальных и интегро-дифференциальных операторах с размазанными краевыми условиями.

А.М.Седлецкий [20] исследовал равносходимость для оператора дифференцирования:

$$l[y] = y', \quad -1 \leq x \leq 1, \tag{11}$$

с весьма трудным для исследования граничным условием "размазанного"типа со степенной особенностью на концах:

$$U(y) = \int\limits_{-1}^1 \frac{k(t)y(t)}{(1-|t|)^\alpha} = 0 \quad (0 < \alpha < 1).$$

Теорема 11. *([20]) Если* $\overset{1}{\underset{-1}{V}} ar\, k(t) < \infty$, $k(1-0)\cdot k(-1+0) \neq 0$, *то для любой* $f(x) \in L[-1,1]$

$$\lim_{r\to\infty} \|(1-|x|)(S_r(f,x) - \sigma_r(f,x))\|_{C[-1,1]} = 0.$$

С.Н.Кабанов [21] исследовал оператор (11) с краевым условием предельно общего вида:

$$ay(-1) + \int_{-1}^{1} y'(t)h(t)dt = 0.$$

Теорема 12. *([21]). Предположим, что* $h(t) \in L^q[-1,1]$, *функции* $M_1h(t), M_1\tilde{h}(t)$, *где* $M_1h(t) = \int_t^1 \frac{\partial(\tau-t)^{\xi+\alpha-1}}{\partial\xi\Gamma(\xi+\alpha)}\Big|_{\xi=0} h(\tau)d\tau$, $\tilde{h}(t) = h(-t)$, *являются функциями ограниченной вариации и* $M_1h(1)\cdot M_1\tilde{h}(1) \neq 0$. *Тогда для любой* $f(x) \in L^p[-1,1]$ *и* $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$

$$\lim_{r\to\infty} \|S_r(f,x) - \sigma_r(f,x)\|_{C[-1+\delta,1-\delta]} = 0. \tag{12}$$

О.И.Амвросова [22] для оператора n-кратного дифференцирования: $l[y] = y^{(n)}$ с размазанными граничными условиями:

$$U_j(y) = \int_{-1}^{1} \varphi_j(t)y(t)dt + \int_{-1}^{1} \frac{k_j(t)}{(1-|t|)^{\alpha_j}} y^{(p_j)}(t)dt = 0 \quad (j = 1,\dots,n),$$

$$n-1 \geq p_1 \geq \dots \geq p_n \geq 0, \quad 0 < \alpha_\nu < 1, \quad \overset{1}{\underset{-1}{V}} ar\, k_\nu(t) < \infty, \quad \overset{1}{\underset{-1}{V}} ar\, \varphi_\nu(t) < \infty$$

выделила класс регулярных краевых условий и для него получила следующий результат.

Теорема 13. *([22]). Если* $f(x) \in L[-1,1]$, *то справедливо* (12). *Если же* $f(x) \in L_p[-1,1]$, $p > 1$, $\alpha_\nu > \frac{1}{q}$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, *то*

$$\lim_{r\to\infty} \|(1-|x|)^\gamma [S_r(f,x) - \sigma_r(f,x)]\|_{C[-1,1]} = 0$$

для любых $\gamma > \frac{1}{p}$.

Предельно общие граничные условия для оператора $l[y] = y^{(n)}$ рассмотрел С.И.Кабанов [23] (к сожалению из-за громоздкости этот результат не приводим).

Наконец, О.И.Амвросовой [24] рассмотрен еще оператор:

$$l[y] = D^\alpha y = \frac{d}{dx}\int_0^x \frac{(x-t)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} y(t)dt, \quad 0 < \alpha < 1, \quad x \in [-1,1],$$

с граничным условием:

$$U(y) = \int_{-1}^{1} \frac{k(t)y(t))}{(1-|t|)^{\beta+1}} dt = 0,$$

когда $\overset{1}{\underset{-1}{V}} ar\, k(t) < \infty$, $0 < \beta + 1 \leq \alpha < 1$, $k(0-0) \neq k(0+0)$, $k(-1+0)\cdot k(1-0) \neq 0$.

Теорема 14. *([24]). Пусть* $f(x) \in L[-1,1]$, $D^\beta f(x)$ *абсолютно непрерывна на* $[-1,1]$. *Тогда*

$$\lim_{r\to\infty} \|(1-|x|)|x|^{1+\gamma}(S_r(f,x) - \sigma_r(f,x))\|_{C[-1,1]} = 0,$$

где γ *любое положительное число.*

Отметим интересную работу А.М.Седлецкого [25], в которой исследована равномерная сходимость разложений по с.п.ф. оператора дифференцирования с граничным условием:

$$U(y) = \int_{-1}^{1} y(t)d\sigma(t) = 0,$$

где $d\sigma(t) = \frac{b(1-|t|)}{(1-|t|)^\alpha}k(t)dt$ и $b(t)$ – произвольная слабо колеблющаяся функция. Этот случай значительно более трудный, чем случай степенной особенности, т.е., когда $b(t) \equiv 1$. Тем самым открывается перспектива получения теорем равносходимости и для такого вида особенностей в граничных условиях.

В заключение приведем следующий результат.

Теорема 15. *([26]). Пусть ядро $M(x,t)$ вольтеррова оператора $Mf = \int_0^x M(x,t)f(t)dt$ имеет вид:*

$$M(x,t) = \frac{(x-t)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} + M_1(x,t),$$

где α нецелое, $\alpha > 2$ и $M_1(x,t)$ удовлетворяет условиям:

1) $\frac{\partial^{i+j}}{\partial x^i \partial t^j} M_1(x,t)$ $(i = 0, \dots, n+2;\ j = 0, 1;\ n-1 < \alpha < n)$ *непрерывны при* $0 \le t \le x \le 1$,
2) $\frac{\partial^i}{\partial x^i} M_1(x,t)_{|t=x} = 0$ $(i = 0, 1, \dots, n)$.

Тогда для ядра резольвенты $M_\lambda f = (E - \lambda M)^{-1} M f = \int_0^x M(x,t,\lambda)f(t)dt$ имеет место асимптотическая формула:

$$M(x,t,\lambda) = \sum_{k=1}^{k_0} y_k(x,\rho) z_k(t,\rho) + O(\rho^{1-\alpha}),$$

где

$$y_k(x,\rho) = (1 + O(\rho^{-1})) \exp \rho_k x + O(1),$$
$$z_k(t,\rho) = O(\rho^{1-\alpha} \exp(-\rho_k t)),$$

$\rho = \lambda^{\frac{1}{\alpha}}$ $\left(\arg\rho \in [0, 2\pi/\alpha)\right)$, $\rho_k = \rho\omega_k$, $\omega_k = \varepsilon^{l_k}$, $\varepsilon = \exp\frac{2\pi i}{\alpha}$ *и l_k выбраны так, чтобы*

$$Re\,\rho_1 \ge \dots \ge Re\,\rho_{k_0} > 0 \ge Re\,\rho_{k_0+1} \ge \dots \ge Re\,\rho_n.$$

Для целого α этот результат был установлен автором ранее [27]. Теорема 15 дала толчок многим исследованиям (см. [28]).

Теорема 15 интересна тем, что может быть использована для исследования разложений по собственным функциям операторов вида: $A = M + T$, где T – интегральный оператор с более гладким ядром.

Список литературы

[1] В. А. Стеклов, *Sur les expressions asymptotiques de certaines functions définies par des équations différentielles linéairs du deuxième ordre, et leur applications an problème du développement d'une function arbitraire en series procédant suivant des dites functions* // Сообщ. матем. об-ва (2), Харьков, 1907-1909, **10**, № 2-6, с. 97-199 (Французский).

[2] E. W. Hobson, On a general convergence theorem, and the theory of the representation of a function by a series of normal functions // Proc. Land. Math. Soc. (2), 1908, **6**, pp. 349-395 (Английский).

[3] A. Haar, Zur Theorie des ortogonalen Funktionen systeme // I Math. Ann., 1910, **69**, pp. 331-371; II Math. Ann., 1911, **71**, pp. 38-53 (Английский).

[4] Я. Д. Тамаркин, *О некоторых общих задачах теории обыкновенных линейных дифференциальных уравнений*, Петроград, 1917 (Русский).

[5] M. M. Stone, A comparison of the series of Fourier and Birkhoff // Trans. Amer. Math. Soc., 1926, **28**, № 4, pp. 695-761 (Английский).

[6] М. А. Наймарк, *Линейные дифференциальные операторы*, М., Наука, 1969, 528 с. (Русский).

[7] А. П. Хромов, Разложение по собственным функциям обыкновенных линейных дифференциальных операторов в конечном интервале // ДАН СССР, 1962, **146**, № 6, с. 1294-1297 (Русский).

[8] В. А. Ильин, О равномерной равносходимости разложений по собственным и присоединенным функциям несамосопряженного обыкновенного дифференциального оператора и в тригонометрический ряд Фурье // ДАН СССР, 1975, **223**, № 3, с. 548-551 (Русский).

[9] В. А. Ильин, Необходимые и достаточные условия базисности подсистемы собственных функций // ДАН СССР, 1976, **227**, с. 796-799 (Русский).

[10] В. А. Ильин, О приближении функций биортогональным рядом по собственным и присоединенным функциям дифференциальных операторов // Сб. "Теория приближения функций", 1977, с. 206-213 (Русский).

[11] А. М. Седлецкий, Биортогональные разложения функций в ряды экспонент на интервалах вещественной оси // Усп. матем. наук, 1982, **37**, вып. 5 (227), с. 51-95 (Русский).

[12] А. П. Хромов, Интегральные операторы с ядрами типа функции Грина // Деп., 1972, № 4841-72 (Русский).

[13] А. П. Хромов, Теоремы равносходимости интегро-дифференциальных и интегральных операторов // Матем. сб., 1981, **114 (156)**, № 3, с. 358-450 (Русский).

[14] S. Salaff, Regular boundary conditions for ordinary differential operators // Trans. Amer. Math. Soc., 1968, **134**, № 2, pp. 355-373 (Английский).

[15] А. М. Минкин, Регулярность самосопряженных краевых условий// Матем. заметки, 1977, **22**, № 6, с. 835-846. (Русский)

[16] Б. В. Пальцев, Разложение по собственным функциям интегральных операторов свертки на конечном интервале с ядрами, преобразования Фурье которых рациональны. "Слабо"несамосопряженные регулярные ядра // Изв. АН СССР, сер. Матем., 1972, **36**, с. 591-634 (Русский).

[17] Л. Г. Назаров, Разложение по собственным функциям одного класса интегральных операторов // Деп., 1976, No 1236-76 (Русский).

[18] А. П. Хромов, Об обращении интегральных операторов с ядрами, разрывными на диагоналях // Матем. заметки, 1998, **64**, вып. 6, с. 932-942 (Русский).

[19] Е. В. Назарова, Задача точного обращения некоторого класса интегральных операторов с разрывными ядрами. Тезисы докл. 10-ой Саратовской зимней школы 27 января-2февраля 2000 г., Саратов, 2000, с. 96-97 (Русский).

[20] А. М. Седлецкий, О равносходимости и равносуммируемости негармонических разложений Фурье с обычными тригонометрическими рядами // Матем. заметки, 1975, **18**, № 1, с. 9-17 (Русский).

[21] С. Н. Кабанов, Теорема равносходимости для оператора дифференцирования с краевым условием общего вида // Сб. "Теория функций и приближений", Тр. 4-ой Саратовской зимней школы, 1990, Саратов, 1990, ч. 2, с. 108-110 (Русский).

[22] О. И. Амвросова, Асимптотика собственных значений и теоремы равносходимости для операторов со степенными особенностями в краевых условиях // Функц. анализ, Межвуз. науч. сб., вып. 21, Ульяновск, 1983, с. 3-11 (Русский).

[23] С. Н. Кабанов, Теорема равносходимости для оператора дифференцирования n-го порядка, с краевыми условиями, порожденными линейными функционалами // Матем. и ее приложения, Межвуз. науч. сб., Саратов, 1988, с. 4-6 (Русский).

[24] О. И. Амвросова, Об одной краевой задаче со степенными особенностями в краевых условиях // Исслед. по современным проблемам математики, Саратов, 1984, с. 31-37 (Русский).

[25] А. М. Седлецкий, Равномерная сходимость негармонических рядов Фурье // Труды матем. ин-та им. В.А.Стеклова РАН, 1991, **2000**, с. 327-337 (Русский).

[26] А. П. Хромов, Об одном применении оператора дробного дифференцирования // Сб. "Дифференциальные уравнения и вычисл. математики", вып. 6, ч. 1, Саратов, 1976, с. 3-22 (Русский).
[27] А. П. Хромов, Конечномерные возмущения вольтерровых операторов (автореферент докторской диссертации) // Матем. заметки, **16**, № 4, 1974, с. 669-680 (Русский).
[28] А. П. Хромов, Асимптотика резольвент интегральных вольтерровых операторов // Труды матем. ин-та им. В.А.Стеклова РАН, 1995, **211**, с. 419-442 (Русский).

Поступила в редакцию 28.12.2001