Ученые записки Таврического национального университета им. В. И. Вернадского
Серия "Математика. Механика. Информатика и Кибернетика"N 1 (2002) 11 – 14
УДК 517.98

И. М. Карабаш, А. С. Костенко

О ПОДОБИИ НЕСАМОСОПРЯЖЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ ВТОРОГО ПОРЯДКА НОРМАЛЬНЫМ

Keywords: Подобие, нормальные операторы, несамосопряжённые дифференциальные операторы, граничные условия

The operator $-(\operatorname{sgn} x)\frac{d^2}{dx^2}$ with glue boundary conditions at 0 is studied in $L^2(\mathbb{R})$. We characterize the class of boundary conditions such that the operator is similar to normal one.

В $L^2(\mathbb{R})$ изучается оператор $-(\operatorname{sgn} x)\frac{d^2}{dx^2}$, порождаемый граничными условиями типа склейки в точке 0. Мы описываем класс граничных условий, для которых оператор подобен нормальному.

1. Рассмотрим в гильбертовом пространстве $L^2(\mathbb{R})$ симметрический оператор

$$A_0 = -(\operatorname{sgn} x)\frac{d^2}{dx^2} \tag{1}$$

с областью определения

$$D(A_0) = \{y \in W_2^2(\mathbb{R}_-) \oplus W_2^2(\mathbb{R}_+) : y(+0) = y(-0) = y'(+0) = y'(-0) = 0\}. \tag{2}$$

В данной заметке мы изучаем квазисамосопряжённые (см., например, [13]), расширения оператора A_0 соответствующие различным граничным условиям в точке 0. Наша цель дать описание тех граничных условий, при которых соответствующий дифференциальный оператор подобен нормальному оператору.

Напомним, что операторы A и C в банаховом пространстве X называются подобными, если существует линейный ограниченный оператор T в X с ограниченным обратным T^{-1} такой, что $A = TCT^{-1}$.

Спектральные задачи вида

$$(Ly)(x) = \lambda r(x) y(x),$$

где L - самосопряжённый дифференциальный оператор, а функция $r(x)$ принимает значения разных знаков, исследуются давно в связи с некоторыми задачами механики и физики (см. [1] и имеющуюся там библиографию). В работах Р. Билса [1] и С. Г. Пяткова [2], [3] был рассмотрен вопрос о базисности Рисса собственных функций для такой спектральной задачи. В последнее время активно исследуются аналогичные вопросы для операторов с непрерывным спектром. В работе Б. Кургуса и Б. Наймана [4] с помощью теории М. Крейна - Г. Лангера дефинизируемых операторов в пространстве Крейна было показано, что оператор

$$\tilde{A} = -(\operatorname{sgn} x)\frac{d^2}{dx^2}$$

задаваемый граничными условиями склейки в точке 0

$$y(-0) = y(+0), \quad y'(-0) = y'(+0),$$

подобен самосопряжённому оператору. Позже Б. Кургус, Б. Найман [5] и другим методом И. М. Карабаш [6] распространили этот результат на операторы вида $(\operatorname{sgn} x)p(-id/dx)$ с неотрицательными полиномами $p(t)$. М. М. Фадеев, Р. Г. Штеренберг [7] получили аналогичный результат для некоторого класса операторов Штурма-Лиувилля с убывающим потенциалом. Уравнения с частными производными рассматривались в работе [8].

2. Оператор A_0, определенный выше, является замкнутым симметрическим оператором с индексами дефекта (2,2), $A_0 \subset A_0^*$, $D(A_0^*) = W_2^2(\mathbb{R}_-) \oplus W_2^2(\mathbb{R}_+)$.

Общее квазисамосопряжённое расширение $A_{(a_{ij})}$ оператора A_0 задаётся граничными условиями

$$\begin{cases} a_{11}y(-0) + a_{12}y'(-0) + a_{13}y(+0)a_{14}y'(+0) = 0 \\ a_{21}y(-0) + a_{22}y'(-0) + a_{23}y(+0)a_{24}y'(+0) = 0 \end{cases} \tag{3}$$

и имеет область определения

$$D(A_{(a_{ij})}) = \{y \in W_2^2(\mathbb{R}_-) \oplus W_2^2(\mathbb{R}_+) : \ y(x) \text{ удовлетворяет условиям (3) } \},$$

причём матрица (a_{ij}) имеет ранг 2. Здесь $W_2^2(\mathbb{R}_\pm)$ – пространства Соболева (см. например [9]).

Для простоты будем считать, что

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{14} \\ a_{21} & a_{24} \end{vmatrix} \neq 0 .$$

Тогда условия (3) могут быть переписаны в виде

$$\begin{cases} y'(+0) = b_{11}y(+0) + b_{12}y'(-0) \\ -y(-0) = b_{21}y(+0) + b_{22}y'(-0). \end{cases} , \text{ где } B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} \tag{4}$$

- матрица порядка 2×2 с комплексными элементами. Оператор, определяемый дифференциальным выражением

$$-(\operatorname{sgn} x)\frac{d^2}{dx^2}$$

и областью определения

$$D(A_B) = \{y \in W_2^2(\mathbb{R}_-) \oplus W_2^2(\mathbb{R}_+) : \ y(x) \text{ удовлетворяет условиям (4) } \} .$$

будем обозначать через A_B.

Нетрудно увидеть, что $A_B^* = A_{B^*}$. Таким образом, A_B самосопряжённый оператор точно тогда, когда матрица B самосопряжённая.

Оператору

$$\tilde{A} = -(\operatorname{sgn} x)\frac{d^2}{dx^2}$$

со стандартной областью определения $D(\tilde{A}) = W_2^2(\mathbb{R})$ соответствует матрица

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} .$$

Очевидно, что $\tilde{A}$ – несамосопряжённый оператор. Как показанно в [4], оператор $\tilde{A}$ подобен самосопряжённому оператору. Наша цель сейчас выделить класс тех матриц B, для которых более общие операторы A_B подобны нормальным. Ответ на этот вопрос даёт следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть по крайней мере одно из чисел b_{12}, b_{21} не равно нулю. Тогда оператор A_B подобен нормальному, если и только если выполняются следующие три условия. Функции*

$$q(z) = -ib_{22}z^2 + (\det B - i)z + b_{11} , \tag{5}$$

$$q^*(z) = -i\overline{b_{22}}z^2 + (\det B^* - i)z + \overline{b_{11}} . \tag{6}$$

1) имеют полюс в ∞*;*
2) не имеют нулей в $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z > 0, \operatorname{Re} z = 0\} \cup \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z = 0, \operatorname{Re} z > 0\}$*;*
3) не имеют кратных нулей в $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z > 0\,, \operatorname{Re} z > 0\} \cup \{0\}$.

Замечание 4. Случай $b_{12} = 0$, $b_{21} = 0$ менее интересен потому, что оператор с такими граничными условиями распадается в прямую сумму двух дифференциальных операторов, действующих в пространствах $L^2(\mathbb{R}_-)$ и $L^2(\mathbb{R}_+)$, а такие операторы подробно изучены.

3. В этом пункте всюду будем полагать, что по крайней мере одно из чисел b_{12}, b_{21} не равно нулю.

Нам понадобится следующий хорошо известный факт: условие

$$\|(T - \lambda I)^{-1}\| \le \frac{\text{const}}{\operatorname{dist}(\lambda, \sigma(T))} \tag{7}$$

является необходимым для подобия оператора T нормальному оператору.

Обозначим через $\sqrt{\lambda}$ ветвь многозначной аналитической функции $\sqrt{\lambda}$ с разрезом вдоль $\mathbb{R}_+$ и такую, что $\sqrt{-1} = i$. Будем считать, что $\sqrt{\lambda} \ge 0$ для $\lambda \ge 0$.

Предложение 4. Непрерывный спектр оператора A_B совпадает с действительной прямой, $\sigma_c(A_B) = \mathbb{R}$. Точечный спектр (множество собственных значений) $\sigma_p(A_B)$ оператора A_B состоит из $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ таких, что

$$\det(B - M(\lambda)) = 0\,, \qquad \text{где } M(\lambda) := \begin{pmatrix} i\sqrt{\lambda} & 0 \\ 0 & \frac{1}{i\sqrt{-\lambda}} \end{pmatrix}. \tag{8}$$

Доказательство. Простые вычисления показывают, что на действительной оси собственных значений нет, откуда легко следует утверждение о непрерывном спектре.

Второе утверждение можно получить стандартным способом, однако мы воспользуемся терминологией граничных троек (см., например, [12]). Заметим, что $\{\mathcal{H}, \Gamma_0, \Gamma_1\}$, где

$$\Gamma_1 y := \operatorname{col}(y'(+0)\ , -y(-0))\ ,\ \Gamma_0 y := \operatorname{col}(y(+0)\ , y'(-0))\ ,\ \mathcal{H} := \mathbb{C}^2,$$

является граничной тройкой для A_0^*. Соответствующая этой граничной тройке функция Вейля имеет вид

$$M(\lambda) = \begin{pmatrix} i\sqrt{\lambda} & 0 \\ 0 & \frac{1}{i\sqrt{-\lambda}} \end{pmatrix}.$$

Кроме того, $D(A_B) = \{y \in D(A_0^*) : \Gamma_1 y = B\Gamma_0 y\}$. Утверждение о точечном спектре следует теперь из [12, Предложение 4]. □

Если $\lambda \in \mathbb{C}_+$, то $\sqrt{-\lambda}/\sqrt{\lambda} = i$, поэтому

$$\det(B - M(\lambda)) = -ib_{22}\sqrt{\lambda} + \det B - i + b_{11}\frac{1}{-i\sqrt{-\lambda}} = \frac{1}{\sqrt{\lambda}}q(\sqrt{\lambda}).$$

Предложение 5. Если $\lambda_0 \in \mathbb{C}_+$ является нулём второго порядка функции $q(\sqrt{\lambda})$, то у оператора A_B есть собственный и присоединённый вектора, соответствующие собственному значению λ_0, и оценка (7) не выполняется в окрестности точки λ_0.

Рассмотрим теперь случай, когда ноль функции $q(\sqrt{\lambda})$ попадает на непрерывный спектр.

Предложение 6. Если $\lambda_0 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ и $z_0 = \sqrt{\lambda_0}$ является нулём полинома $q(z)$, то для оператора A_B оценка (7) не выполняется в окрестности точки λ_0.

Если $\lambda_0 = 0$ и $z_0 = \sqrt{\lambda_0} = 0$ является нулём второго порядка полинома $q(z)$, то для оператора A_B оценка (7) не выполняется в окрестности точки $\lambda_0 = 0$.

Замечание 5. Если $z_0 = 0$ является нулём первого порядка полинома $q(z)$, то для оператора A_B оценка (7) в окрестности точки $\lambda_0 = 0$ оказывается верной.

Предложение 7. Для того чтобы оценка (7) выполнялась при $\lambda \to \infty$ необходимо, чтобы функция $q(z)$ имела полюс на бесконечности.

Из предложений 1 – 3 следует необходимость выполнения условий 1) - 3) на полином $q(z)$, для подобия оператора A_B нормальному.

Если $\lambda \in \mathbb{C}_-$, то $\sqrt{-\lambda}/\sqrt{\lambda} = -i$, поэтому

$$\det(B - M(\lambda)) = -ib_{22}\sqrt{\lambda} + \det B + i - b_{11}\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = \frac{1}{-\sqrt{\lambda}}\overline{q^*(\overline{-\sqrt{\lambda}})}.$$

Аналогичным образом показываем, что условия 1) - 3) на полином $q^*(z)$ необходимы, для подобия оператора A_B нормальному оператору.

Доказательство достаточности основанно на критерии подобия замкнутого оператора самосопряжённому [10], [11].

Список литературы

[1] Beals R. *Indefinite Sturm-Liouville problems and half range completeness* // J. Different. Equat.— 1985.—V. 56, no. 3.— P.391–407.

[2] Пятков С. Г. *Свойства собственных функций одной спектральной задачи и некоторые их приложения* // Некоторые приложения функционального анализа к задачам математической физики.— Новосибирск: ИМ СО АН СССР, 1986.—С.65–84.

[3] Пятков С. Г. *Некоторые свойства собственных функций линейных пучков* // Сибирский мат. журнал.—1989.—Т. 30, no. 4.—С.111–124.

[4] Ćurgus B., Najman B. The operator $-(sgnx)\frac{d^2}{dx^2}$ is similar to selfadjoint operator in $L^2(\mathbb{R})$. // Proc. Amer. Math. Soc.—1995.— V. 123.—P.1125–1128.

[5] Ćurgus B., Najman B. Positive differential operator in Krein space $L^2(\mathbb{R})$. // Oper. Theory Adv. and Appl.,Birkhäuser, Basel.—1996.— V. 87.—P.95–104.

[6] Karabash I. M., *J-selfadjoint ordinary differential operators similar to selfadjoint operators* // Methods of Functional Analysis and Topology.—2000.—V. 6, no. 2.—P.22–49.

[7] Фадеев М. М., Штеренберг Р. Г. *О подобии некоторых сингулярных дифференциальных операторов самосопряжённым* // Записки научных семинаров ПОМИ. —2000.—Т. 270.—С.336–349.

[8] Ćurgus B., Najman B. Positive differential operator in Krein space $L^2(\mathbb{R}^n)$. // Oper. Theory Adv. and Appl.,Birkhäuser, Basel.—1998.—V. 106.—P.113–130.

[9] Березанский Ю. М., Ус Г. Ф., Шефтель З. Г. *Функциональный анализ.*— Киев: Высшая школа, 1990.—600 с.

[10] Набоко С. Н. *Об условиях подобия унитарным и самосопряжённым операторам* // Функц. анализ и его прилож.—1984.—Т. 18, no. 1.—С.16–27.

[11] Маламуд М. М. *Критерий подобия замкнутого оператора самосопряженному* // Укр. мат. журн.—1985.—Т. 37, no. 1.—С.49–56.

[12] Деркач В. А., Маламуд М. М. *Характеристические функции почти разрешимых расширений эрмитовых операторов* // Укр. мат. журн.—1992.—Т. 44, no. 4.—С.435–459.

[13] Ахиезер Н. И., Глазман И. М. *Теория линейных операторов в гильбертовом пространстве.* —Харьков: "Вища Школа", 1978, Т. 2.—287 с.

Поступила в редакцию 15.03.2002