Ученые записки Таврического национального университета им. В. И. Вернадского

Серия "Математика. Механика. Информатика и Кибернетика"N 1 (2002) 41 – 43

УДК 517.98

Говоров В. М.

ДВУПАРАМЕТРИЧЕСКИЕ КОСИНУС - ФУНКЦИИ

Keywords: Косинус-функция,условие четности

Однопараметрические КОФ или "просто"КОФ впервые были изучены в [1]. *Приложения КОФ к теории абстрактных дифференциальных уравнений второго порядка систематически изучены в* [2] *и* [4],*что дало значительный толчок развитию теории КОФ. В* [3] *можно найти удачную систематизацию основных результатов. В этой статье предлагаетс подход к построению и исследованию двупараметрических косинус-функций (в дальнейшем сокращенно двупараметрических КОФ).*

Пусть - банахово пространство. $L(X, X)$ - пространство линейных ограниченных операторов над X с операторной нормой.

Определение 1. Функция $W : R^2 \to L(X, X)$ называется двупараметрической косинус-функцией, если выполнены следующие услови

i) $\forall x_1, x_2, y_1, y_2 \in R$
$W(x_1 + x_2, y_1 + y_2) + W(x_1 - x_2, y_1 - y_2) = 2W(x_1, y_1)W(x_2, y_2)$

ii)$W(0, 0) = I$, где I-тождественный оператор

iii) $W(x, y)$ -сильно непрерывная функция,т.е. $\forall u \in X \lim\limits_{x\to 0, y\to 0} W(x, y)u = u$

Приведем простейшие свойства двупараметрических КОФ.

1)$\forall x, y \in R \quad W(x, y) = W(-x, -y)$

2) $\forall x, y \in R \quad W(x, 0), W(0, y)$ - однопараметрические КОФ.

3)$\forall x, y \in R \quad W(x, y) + W(x, -y) = 2W(x, 0)W(0, y)$

4) $\forall x, y \in R \quad W(x, y) + W(-x, y) = 2W(0, y)W(x, 0)$

5)$\forall x, y \in R \quad W(x, 0)W(0, y) = W(0, y)W(x, 0)$

Рассмотрим примеры двупараметрических КОФ

Пример 1. Пусть C(t) - однопараметрическая КОФ, $C : R \to L(X, X)$. Построим двупараметрическую КОФ W следующим образом. $\forall x, y, \in R$ определим $W(x, y) = C(\alpha x + \beta y)$, где α, β - некоторые действительные числа.

Пример 2. Пусть $T(x)$ и $S(y)$ - группы линейных операторов. Построим двупараметрическую КОФ $W(x, y)$ следующим образом $W(x, y) = \frac{1}{2}(T(\alpha x)S(\beta y) + T(-\alpha x)S(-\beta y))$, где α, β - некоторые действительные числа.

Рассмотрим одно представление двупараметрической КОФ. Известно, что любую двупараметрическую полугруппу линейных операторов $W(x, y)$ можно представить с помощью двух однопараметрических полугрупп следующим образом $W(x, y) = T(x)S(y)$, где $T(x)$ и $S(y)$ - некоторые однопараметрические полугруппы.

Возникает вопрос, справедливо ли подобное представление для КОФ ?

Оказывается, что в общем случае оно не имеет место, но при некотором сужении класса изучаемых КОФ все же удается получить аналогичный факт. С этой целью введем дополнительное условие четности, а именно пусть $\forall x, y, \in R \quad W(x, y) = W(-x, y)$ В дальнейшем будем рассматривать только такие двупараметрические КОФ, которые удовлетворяют этому условию.

По сути, условие четности требует, чтобы функция была четной по первому аргументу. Учитывая свойство 1), нетрудно видеть, что из четности по первому аргументу вытекает четность по второму, и наоборот. Таким образом, в условии четности нет необходимости уточнять аргумент, по которому функция четна. Приведем пример четных двупараметрических КОФ.

Пример 3. Пусть $X = R^3 . W : R^2 \to L(R^3, R^3)$

$$W(x,y) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{x^2}{2} & \frac{y^2}{2} & 1 \end{pmatrix}$$

Теорема 1. Для любой четной двупараметрической КОФ $W(x,y)$ существуют такие однопараметрические КОФ $T(x)$ и $S(y)$, что $W(x,y) = T(x)S(y)$. Обратное утверждение неверно, т.е существуют такие однопараметрические КОФ $T(x)$ и $S(y)$, что функция $W(x,y) = T(x)S(y)$ не является двупараметрической КОФ.

Если $T(x)$ и $S(y)$ - некоторые однопараметрические КОФ, то необходимое и достаточное условие того, чтобы функция $W(x,y) = T(x)S(y)$ была четной двупараметрической КОФ, формулируется следующим образом:

1) $\forall x, y \in R \quad C(x)S(y) = S(y)C(x)$

2) $\forall x_1, x_2, y_1, y_2 \in R \quad (C(x_1) - C(x_2))(S(y_1) - S(y_2)) = 0.$

Для однопараметрических КОФ одним из ключевых понятий являетс понятие генератора. Справедлива следующее утверджение.

Лемма 1.

Пусть A и B - генераторы некоторых однопараметрических КОФ $T(x)$ и $S(y)$ соответсвенно, причем $\forall x, y \in R \quad C(x)S(y) = S(y)C(x)$. Тогда два условия эквивалентны

a)$\forall x_1, x_2, y_1, y_2 \in R \quad (C(x_1) - C(x_2))(S(y_1) - S(y_2)) = 0.$

b) $AB|_{D(AB)} = 0$

Oбщим теперь понятие генератора КОФ на двупараметрический случай.

Определение 2. Генератором двупараметрической (необязательно четной) КОФ $W(x,y)$ называется пара операторов $\langle A, B \rangle$, которые действуют в банаховом пространстве X (вообще говоря , неограниченных) и определяютс следующим образом

$$D(A) = \left\{ x \in X : \exists \lim_{h \to 0} \tfrac{2}{h^2} \left(W(h,0)x - x \right) \right\}, \; Ax = \lim_{h \to 0} \tfrac{2}{h^2} \left(W(h,0)x - x \right)$$

$$D(B) = \left\{ x \in X : \exists \lim_{h \to 0} \tfrac{2}{h^2} \left(W(0,h)x - x \right) \right\}, \; Ax = \lim_{h \to 0} \tfrac{2}{h^2} \left(W(0,h)x - x \right)$$

Пример 4. Вернемся к двупараметрической КОФ из примера 3. Генератором такой КОФ будет пара матриц $\langle A, B \rangle$, где $A = \begin{pmatrix} 000 \\ 000 \\ 100 \end{pmatrix}$,$B = \begin{pmatrix} 000 \\ 000 \\ 010 \end{pmatrix}$.

Теперь можем сформулировать основной результат, полученный для четных двупараметрических КОФ (критерий генератора четной двупараметрической КОФ)

Теорема 2. Для того, чтобы пара операторов $\langle A, B \rangle$, вообще говоря неограниченных, которые действуют в банаховом пространстве , была генератором некоторой четной двупараметрической КОФ $W(x,y)$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись следующие условия :

1) существовали такие однопараметрические КОФ $T(x)$ и $S(y)$, чтобы A и B были их генераторами соответственно;

2) Резольвенты A и B коммутировали между собой;

3) $AB|_{D(AB)} = 0$

Если эти условия выполнены,то справедливо представление $W(x,y) = T(x)S(y)$.

Возвращаясь к примеру 4, убедимся, что он полностью согласуется со сформулированным в теореме результатом. Действительно, если рассмотреть следующие однопараметрические КОФ

$T(x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{x^2}{2} & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $S(y) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{y^2}{2} & 1 \end{pmatrix}$, то их генераторами будут операторы A $= \begin{pmatrix} 000 \\ 000 \\ 100 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 000 \\ 000 \\ 010 \end{pmatrix}$ соответственно. Очевидно, что $AB = 0$, а поэтому и их резольвенты коммутируют. Нетрудно видеть, что $W(x,y) = T(x)S(y)$.

Список литературы

[1] Sova M. Cosine operator functions, Warszawa, PWN,1966, 47s. (Inst.matem.)

[2] Fattorini H. O. Second order differential equations in Banach spaces // North Holland. Amsterdam.- 1985.

[3] Trevis C.C. Webb G.F. Cosine families and abstract non-linear second order differential equations.// Acta math.Acad. Sci Hung. - 1978. - 32,№3. - p.75-96

[4] Крейн С. Г., Хазан М.И. Дифференциальные уравнения в банаховом пространстве.

Поступила в редакцию 29.03.2002