Ученые записки Таврического национального университета им. В. И. Вернадского

Серия "Математика. Механика. Информатика и Кибернетика"N 1 (2002) 5 – 10

УДК 517.98

Доманов И. Ю.

СПЕКТРАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ СТЕПЕНЕЙ ОПЕРАТОРА $(Vf)(x) = q(x)\int_0^x w(t)f(t)dt$

Keywords: Invariant subspace, cyclic subspace,similarity

1.Введение. Хорошо известно (см. [1], [3]), что оператор интегрирования определенный на $L_p[0,1]$ соотношением $J : f \to \int_0^x f(t)dt$ является одноклеточным при $p \in [1,\infty)$ и его решетка инвариантных подпространств антиизоморфна сегменту $[0,1]$. То же оказывается верным (см. [1], [3]) и для простейших вольтерровых операторов

$$J^\alpha : f \to \int_0^x \frac{(x-t)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} f(t)dt, \qquad \alpha > 0$$

являющихся комплексными степенями оператора интегрирования J.

Более того, соответствующие решетки инвариантных и гиперинвариантных подпространств имеют вид ([1, 2, 3]) :

$$LatJ^\alpha = HyplatJ^\alpha = \{E_a := \chi_{[a,1]}L_p[0,1] : 0 \le a \le 1\}; \tag{1}$$

Из описания (1) решетки $LatJ^\alpha$ получается следующее описание циклических векторов оператора J^α :

$$f \in CycJ^\alpha \Leftrightarrow 0 \in \mathrm{supp} f(x) \Leftrightarrow \int_0^\varepsilon |f(x)|^p dx > 0 \ \forall \varepsilon > 0 \tag{2}$$

Условие (2) называют ε-условием.

М.М.Маламудом в [6, 7] проведен спектральный анализ оператора $A = J^\alpha \otimes B$, действующего в $L_p[0,1] \otimes \mathbb{C}^n$ и являющегося тензорным произведением оператора $J^\alpha_\cdot$ и произвольной невырожденной диагональной $n \times n$ матрицы $B = diag(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$. В частности, в [6, 7] описаны решетки $LatA$ и $HyplatA$ инвариантных и гиперинвариантных подпространств оператора A, а также множество $CycA$.

В работе [4] Joo Ho Kang рассматривал оператор

$$V_{q,w} : f \to 2iq(x) \int_0^x f(t)w(t)dt \tag{3}$$

в пространстве $L_2[0,1]$ над полем $\mathbb{R}$ в случае, когда функции $q(x), w(x)$ положительны и непрерывны. При этих условиях на функции q и w была доказана одноклеточность оператора $V_{q,w}$ и было описано множество $CycV_{q,w}$ его циклических векторов.

В настоящем сообщении мы проводим спектральный анализ оператора вида (3) отказавшись от условия $q(x)w(x) > 0$, однако считая функцию $q(x)w(x)$ вещественной. При этом, в случае знакопеременной функции $q(x)w(x)$ обнаружен ряд новых эффектов :

1) оператор $V_{q,w}$ утрачивает свойство одноклеточности;

2) его сужения на некоторые инвариантные подпространства квазиподобны операторам вида $A = J \otimes B$;

3) при некотрых условиях оператор $V_{q,w}$ вида (3) может быть циклическим, не будучи одноклеточным.

Мы приводим также необходимые и достаточные условия на функции $q(x)$, $w(x)$ при которых оператор $V_{q,w}$ не только одноклеточен, но цикличен и даже квазиподобен и подобен оператору J. Оказалось, что одноклеточность оператора $V_{q,w}$ эквивалентна его квазиподобию оператору J и эквивалентна условию $q(x)w(x) > 0$ п.в. на [0,1]. Подчеркнем, что большинство результатов новы и для случая $q(x)w(x) > 0$.

Обозначения.

1) X_1, X_2 - Банаховы пространства; 2) $[X_1, X_2]$- пространство линейных ограниченных операторов из X_1 в X_2; 3) $[X] := [X, X]$ пространство ограниченных операторов в банаховом пространстве X; 4) Lat$T$ - решетка инвариантных подпространств оператора $T \in [X]$; 5) $kerT = \{x \in X \ : \ Tx = 0\}$ -ядро оператора T; 6) $\Re(T) = \{Tx \ : \ x \in X\}$-образ оператора $T \in [X]$; 7) span$E$ замкнутая линейная оболочка множества $E \subset X$; 8) supp f носитель функции $f(x)$; 9) $r*f$ -обозначает свертку функций $r, \ f \in L_1[0,1] \ : \ r*f := \int_0^x r(x-t)f(t)dt$.

2.Квазиподобие операторов $V_{q,w}$ и $V_{r,1}$. Пусть $q \in L_p[0,1]$, $w \in L_q[0,1]$, $q(x)w(x) = \overline{q(x)w(x)} \neq 0$ для п.в. $x \in [0,1]$. Тогда оператор

$$V_{q,w} : f \to q(x) \int_0^x f(t)w(t)dt$$

действующий в пространстве $L_p[0,1]$ ограничен и компактен, так как является оператором класса Хилле-Тамаркина(см. [10]). Не трудно проверить, что его степени имеют вид :

$$(V_{q,w}^{k+1} f)(x) = \frac{1}{k!} q(x) \int_0^x (Q(x) - Q(t))^k f(t)w(t)dt,$$

где $Q(x) = \int_t^x q(s)w(s)ds$. Введем некоторые определения, используемые в дальнейшем.

Определение 1. ([3]) Подпространство E банахова пространства X называется циклическим подпространством для оператора $T \in [X]$ если $span\{T^n E : n \geq 0\} = X$. Вектор $f(\in X)$ называется циклическим если $span\{T^n f : n \geq 0\} = X$.

$Cyc(T)$ -множество всех циклических подпространств оператора T.

Определение 2. ([3]) Положим

$$\mu_T := \inf_E \{dimE : E \text{ циклическое подпространство оператора } T \text{в } X\}.$$

μ_T называют спектральной кратностью оператора T в X.

Отметим, что μ_T может равняться ∞.

Говорят, что оператор T циклический, если $\mu_T = 1$.

Определение 3. Оператор $T \in [X_1, X_2]$ называют деформацией, если $kerT = \{0\}$ и $\overline{(TX_1)} = X_2$.

Пусть $A \in [X_1]$, $B \in [X_2]$. Говорят, что операторы A и B квазиподобны, если существуют деформации $T_1 \in [X_1, X_2]$ и $T_2 \in [X_2, X_1]$ такие, что $T_1 A = BT_1$ и $AT_2 = T_2 B$.

Говорят, что операторы A и B подобны, если существует ограниченный вместе с обратным оператор $T \in [X_1, X_2]$ такой, что $A = T^{-1}BT$.

Легко видеть, что если операторы A и B квазиподобны, то $\mu_A = \mu_B$.

Оказывается, что изучение степеней оператора $V_{q,w}$ с помощью квазиподобия можно свести к случаю когда $|q| \equiv 1$ и $w \equiv const$.

Теорема 1. *Пусть* $R(x) := \int\limits_0^x |q(s)w(s)|ds$, $R(1) = 1$, $R^{-1}(x)$ *- функция обратная к* $R(x)$ $(R^{-1} \circ R = R \circ R^{-1} = x)$ *и* $r(x) := sign(qw)(R^{-1}(x))$. *Тогда*

1) операторы $V_{q,w}$ *и* $V_{r,1}$ *квазиподобны;*

2) в качестве деформаций X *и* Y *можно взять операторы*

$$(Xf)(x) = q(x) \int\limits_0^{R(x)} f(t)dt, \tag{4}$$

$$(Yf)(x) = r(x) \int\limits_0^{R^{-1}(x)} w(t)f(t)dt, \tag{5}$$

то есть $V_{q,w}X = XV_{r,1}$ *и* $YV_{q,w} = V_{r,1}Y$.

3) Справедливы равенства

$$XY = V_{q,w}^2, \qquad YX = V_{r,1}^2$$

Следствие 1. *Пусть оператор* Y *определен формулой* (5). *Тогда подпространство* $E \subset L_p[0,1]$ *- циклическое для оператора* $V_{q,w}$ *тогда и только тогда, когда подпространство* $\overline{YE}$ *- циклическое для оператора* $V_{r,1}$, *т.е.*

$$E \in CycV_{q,w} \Longleftrightarrow \overline{YE} \in CycV_{r,1}.$$

Следствие 2. *(см.[4]) Пусть* $q > 0$, $w > 0$, $q, w \in C[0,1]$ *и* $\int_0^1 q(t)w(t)dt = 1$. *Тогда операторы* $V_{q,w}$ *и* J *подобны, а, следовательно, оператор* $V_{q,w}$ *одноклеточен.*

Доказательство. Достаточно проверить, что оператор

$$(Tf)(x) = q(x)f(\int\limits_0^x q(t)w(t)dt) \tag{6}$$

ограничен вместе с обратным и $TJ = V_{q,w}T$

Замечание 1. Отметим, что оператор T вида (6) является преобразованием, Лиувилля которое иногда позволяет сводить уравнение Штурма-Лиувилля с несуммируемым потенциалом к уравнению с суммируемым потенциалом (см. [5]).

Замечание 2. В случае, когда $q, w \in AC[0,1]$, подобие операторов $V_{q,w}$ и cJ вытекает из общего результата М.М. Маламуда (см. [8]) о подобии оператора $K((Kf)(x) = \int_0^x k(x,t)f(t)dt)$ оператору интегрирования J.

3. Критерий одноклеточности. Следующая теорема даст критерий одноклеточности оператора $V_{q,w}^k$.

Теорема 2. *Пусть* $qw = \overline{qw}$. *Тогда следующие условия эквивалентны*

1a. $LatV_{q,w}^k = LatJ = \{\chi_{[a,1]}L_p[0,1] : 0 \le a \le 1\}$;

1b. $CycV_{q,w}^k = CycJ$;

2. Оператор $V_{q,w}^k$ *одноклеточный;*

3a. Функция $q(x)w(x)$ *почти всюду не меняет знак* $x \in [0,1]$;

4. Оператор $V_{q,w}^k$ *квазиподобен* cJ^k, $c = \overline{c}$.

Обозначим через $N(f)$-число перемен знака функции f. Оказывается, что $\mu_{V^k_{q,w}} = [N(qw)/2]+1$, если k - нечетно и $\mu_{V^k_{q,w}} = N(qw)+1$, если k–четно. В частности, $\mu_{V^k_{q,w}} = \infty$, если $N(qw)=\infty$.

В случае $N(q)<\infty$ функция $q(x)$ может быть записана в виде

$$q(x) = \begin{cases} 1, & x \in [a_{2i}, a_{2i+1}], i = 0,1,\dots,[\frac{n-1}{2}]; \\ -1, & x \in [a_{2i-1}, a_{2i}], i = 0,1,\dots,[\frac{n}{2}]; \end{cases} \qquad (7)$$

где $n = N(q)+1$, а $0 = a_0 < a_1 \dots < a_{n-1} < a_n = 1$ - некоторое разбиение отрезка $[0,1]$.

Для каждой функции $f \in L_p[0,1]$ определим функции

$$\tilde{f}^i(x) = f(a_i - x) + f(a_i + x), \quad i = 0,1,\dots,n-1.$$

Всюду далее для $x \notin [0,1]$ полагаем $f(x)=0$. В частности, $\tilde{f}^0(x) = f(x)$. Для краткости сформулируем результаты для нечетного k.

Теорема 3. *Пусть k-нечетно и $V^k_{q,1} = q(x)\int\limits_0^x f(t)dt$ с функцией $q(x)$ вида (7). Тогда*

1) $\mu^k_V = \frac{n}{2}+1$;

2) система $\{f_i\}_{i=1}^N$ векторов f_i порождает циклическое подпространство в $L_p[0,1]$ для оператора $V^k_{q,1}$ тогда и только тогда, когда

a) $N \geq 1 + [\frac{n}{2}]$;

b) матрицы

$$F_1(x) = \begin{pmatrix} \tilde{f}_1^0(x) & \tilde{f}_1^2(x) & \dots & \tilde{f}_1^{2i}(x) & \dots & \tilde{f}_1^{2[n/2]}(x) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \tilde{f}_j^0(x) & \tilde{f}_j^2(x) & \dots & \tilde{f}_j^{2i}(x) & \dots & \tilde{f}_j^{2[n/2]}(x) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \tilde{f}_N^0(x) & \tilde{f}_N^2(x) & \dots & \tilde{f}_N^{2i}(x) & \dots & \tilde{f}_N^{2[n/2]}(x) \end{pmatrix},$$

$$F_2(x) = \begin{pmatrix} \tilde{f}_1^1(x) & \tilde{f}_1^3(x) & \dots & \tilde{f}_1^{2i-1}(x) & \dots & \tilde{f}_1^{2[n/2]-1}(x) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \tilde{f}_j^1(x) & \tilde{f}_j^3(x) & \dots & \tilde{f}_j^{2i-1}(x) & \dots & \tilde{f}_j^{2[n/2]-1}(x) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \tilde{f}_N^1(x) & \tilde{f}_N^3(x) & \dots & \tilde{f}_N^{2i-1}(x) & \dots & \tilde{f}_N^{2[n/2]-1}(x) \end{pmatrix}$$

имеют максимальный $*$-ранг, то есть

$$* - rankF_1(x) + * - rankF_2(x) = n; \qquad (8)$$

Теорема 3 доказывается методом, впервые примененном М.М. Маламудом в [6, 7].

Следствие 3. *Оператор $V^k_{q,1}$ циклический, тогда и только тогда когда либо k нечетно и $N(q) \leq 1$, либо k четно и $N(q)=0$. При этом*

1) если $q(x) \equiv 1$, то $V^k = J^k$ и $f(x) \in CycJ \Leftrightarrow f(x)$ удовлетворяет ε - условию.;

2) если $q(x) = \chi_{[0,a]}(x) - \chi_{[a,1]}(x)$ и k нечетно, то

$f(x) \in CycV^k_{q,1} \Leftrightarrow f(x) * (f(a-x) + f(a+x))$ удовлетворяет ε - условию.

Если функция $f(x)$ непрерывна в окрестности нуля и $f(0) \neq 0$, то $f(x)$ очевидно удовлетворяет ε-условию (2). Следовательно, такая функция $f(x)$ является циклической для оператора интегрирования J. Это же остается в силе и для оператора $V^k_{q,w}$.

Предложение 1. Пусть функции $f_i(x) \in L_p[0,1]$ $(i = 1, \dots n)$–непрерывны в окрестностях точек a_i $(i = 1, \dots n)$. Тогда для того, чтобы система $\{f_i\}_{i=1}^n$ векторов f_i порождала циклическое подпространство в $L_p[0,1]$ для оператора $V_{q,1}^k$ (k–нечетно) достаточно выполнения условий

$$det \begin{pmatrix} f_1(0) & f_1(a_2) & \dots & f_1(a_{2[n/2]}) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ f_n(0) & f_n(a_2) & \dots & f_n(a_{2[n/2]}) \end{pmatrix} \neq 0 \tag{9}$$

$$det \begin{pmatrix} f_1(a_1) & f_1(a_3) & \dots & f_1(a_{2[n/2]-1}) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ f_n(a_1) & f_n(a_3) & \dots & f_n(a_{2[n/2]-1}) \end{pmatrix} \neq 0 \tag{10}$$

Замечание 3. Можно показать, что условия (9)-(10) не являются необходимыми для цикличности системы векторов $\{f_i\}_{i=1}^n$.

В качестве следствия из Теоремы 3 вытекает следующий результат М.М. Маламуда ([6, 7]). о циклических подпространствах оператора $A = J^k \otimes B$ (в [6, 7] аналогичный результат доказан для более общих операторов вида $A = J^\alpha \otimes B$, $\alpha > 0$).

Предложение 2. (см. [6, 7]) Пусть $B = diag(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$–диагональная невырожденная матрица и $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n$. Пусть $A = J^k \otimes B = \oplus_{i=1}^n \lambda_i J^k$–оператор действующий в пространстве $L_p[0,1] \otimes \mathbb{C}^n$ $(1 \leq p < \infty)$. Тогда:

1) $\mu_A = n$;

2) система векторов

$$f_i = \{f_{i1}, \dots, f_{in}\} \in L_p[0,1] \otimes \mathbb{C}^n \qquad 1 \leq i \leq N$$

порождает циклическое подпространство для оператора A тогда и только тогда, когда :

$i)$ $N \geq n$;

ii) Матрица

$$F(x) = \begin{pmatrix} f_{11}(x) & f_{12}((\frac{\lambda_1}{\lambda_2})^{\frac{1}{k}}x) & \dots & f_{1n}((\frac{\lambda_1}{\lambda_n})^{\frac{1}{k}}x) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ f_{N1}(x) & f_{N2}((\frac{\lambda_1}{\lambda_2})^{\frac{1}{k}}x) & \dots & f_{Nn}((\frac{\lambda_1}{\lambda_n})^{\frac{1}{k}}x) \end{pmatrix}.$$

имеет максимальный $*$-ранг, т.е. $*$-$rankF(x) = n$.

Теорема 4. *Пусть* $N(qw) = \infty$. *Тогда* $\mu_{V_{q,w}^k} = \infty$.

Комбинируя Теорему 3 и Следствие 3 получаем

Предложение 3. Оператор $V_{q,w}^k$–циклический точно тогда, когда либо k нечетно и $N(qw) \leq 1$, либо k четно и $N(qw) = 0$.

Список литературы

[1] Гохберг И.Ц., Крейн М.Г. Теория вольтерровых операторов в гильбертовом пространстве и ее приложения М.:Наука, 1967.

[2] М.С.Бродский. Треугольные и жордановы представления линейных операторов. М.Наука, 1969, 287 С.

[3] Н.К.Никольский. Лекции об операторе сдвига. М.Наука, 1980, 383С.

[4] Joo Ho Kang. On the Unicellularity of Volterra-Type Integral Operators. Kyungpook Mathematical Journal, 1990, v. 30, 1-6

[5] F.A.Berezin, M.A. Shubin. Shredinger's equations. M. press of Moscow un-ty (in Russian), 1983,P.392

[6] М.М.Маламуд О воспроизводящих подпространствах вольтерровых операторов. Докл.Акад.Наук, 1996, v. 351,4,стр. 143-146
[7] M.M.Malamud. Invariant and hyperinvariant subspaces of direct sums of simple Volterra operators. Operator Theory : Advan. and App., 1998, Integral and Differential Operators, v. 102, p. 143-167
[8] M.M.Malamud. Similarity of volterra operators and related questions of the theory of diferential equations of fractional order. Trans.Moscow Math. Soc.,1995,v. 55, p.57-122
[9] Domanov I.Yu. On Cyclic and Invariant Subspaces of an Operator $J \otimes B$ in the Sobolev Spaces of Vector Functions. Methods of Functional Analysis and Topology, 1999, v.5, No 1, p. 1-12
[10] Халмош П., Сандер В. Ограниченные интегральные операторы в пространствах L_2. - М.:Наука, 1985.-160 с.

Поступила в редакцию 11.03.2002