Ученые записки Таврического национального университета имени В. И. Вернадского
Серия «Физика». Том 14 (53). 2001 г. №1. С. 38-41

УДК 537.851

W.Mueller, W.-R.Novender, Баженов В.М., Долгошеев А.Т

О ТЕОРЕМЕ СИРЛА

Произвольное плоскопараллельное электростатическое поле $\vec{E}^+$ внутри бесконечного в направлении, перпендикулярном плоскости чертежа, незаряженного диэлектрического цилиндра (см. рис.1) является "трансформацией" поля внешних источников $\vec{E}^0$ с коэффициентом трансформации k:

$$\vec{E}^+ = k\,\vec{E}^0.$$

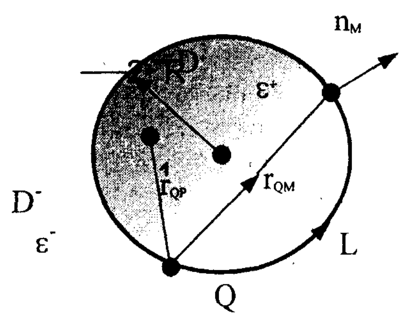

Рис.1

Для доказательства введем два потенциала φ и φ^0, определенные всюду в плоскости, по правилу:

$$\vec{E} = -\mathrm{grad}\,\varphi,\ \vec{E}^0 = -\mathrm{grad}\,\varphi^0.$$

При этом

$$\vec{E} = \begin{cases} \vec{E}^+ = -grad\varphi^+ \text{ в } D^+ \\ \vec{E}^- = -grad\varphi^- \text{ в } D^- \end{cases}. \tag{1}$$

Будем искать φ в области $D^+ + L$ (рис. 1) в виде суммы известного поля φ^0 внешних по отношению к этой области источников и потенциала простого слоя с плотностью $\sigma(Q \in L)$:

$$\varphi(P) = \varphi^0(P) + \frac{1}{2\pi}\oint\limits_L \sigma(Q)\ell n\frac{1}{r_{QP}}d\ell_Q \tag{2}$$

Продифференцируем (2) по нормали к контуру и устремим точку P к L вначале из области D^+, а затем – из D^-. Используя теорему о предельных значениях нормальной производной потенциала простого слоя [1], получим для $P \to M \in L$:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial n^+}(M) = \frac{1}{2\pi}\oint\limits_L \sigma(Q)\frac{cos(QM, n_M)}{r_{QM}}d\ell_Q + \frac{\sigma(M)}{2} + \frac{\partial\varphi^0}{\partial n}(M) \tag{3}$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial n^-}(M) = \frac{1}{2\pi}\oint\limits_L \sigma(Q)\frac{cos(QM, n_M)}{r_{QM}}d\ell_Q - \frac{\sigma(M)}{2} + \frac{\partial\varphi^0}{\partial n}(M) \tag{4}$$

где:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial n^+}(M)=\ell im(P\to M\in L)\frac{\partial\varphi^+}{\partial n}(P\in D^+),\frac{\partial\varphi}{\partial n^-}(M)=\ell im(P\to M\in L)\frac{\partial\varphi^-}{\partial n}(P\in D^-).$$

Вычитая из(3) (4), с учетом (1) получаем:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial n^+}-\frac{\partial\varphi}{\partial n^-}=E_n^- - E_n^+ = \sigma .$$

Или

$$\sigma = E_n^- - E_n^+ = \frac{\varepsilon^+ - \varepsilon^-}{\varepsilon^+\varepsilon^-}\Im_n,$$

где $\Im_n$ - нормальная к поверхности цилиндра составляющая вектора электрического смещения:

$$\vec{\Im}=\varepsilon\vec{E}\text{, а }\varepsilon=\begin{cases}\varepsilon^+ в D^+\\ \varepsilon^- в D^-\end{cases}.$$

Поскольку контур L – окружность,

$$\frac{cos(QM,n_M)}{r_{QM}}=\frac{1}{2R}, \tag{5}$$

где R – радиус этой окружности [2].

Теперь с учетом постулата Максвелла [3], незаряженности цилиндра и (5) имеем:

$$\oint_L\sigma(Q)\frac{cos(QM,n_M)}{r_{QM}}d\ell_Q = \frac{\varepsilon^+ - \varepsilon^-}{2R\varepsilon^+\varepsilon^-}\oint_L\Im_n d\ell = 0. \tag{6}$$

Сложив (3) и (4), с учетом (6) получаем:

$$\frac{\partial\varphi^0}{\partial n} = -E_{0n} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial n^+}+\frac{\partial\varphi}{\partial n^-}\right) = -(E_n^+ + E_n^-) = -\frac{1}{2}\frac{\varepsilon^+ - \varepsilon^-}{\varepsilon^+\varepsilon^-}\Im_n .$$

И окончательно

$$\Im_n = \frac{2\varepsilon^+\varepsilon^-}{\varepsilon^+ + \varepsilon^-}E_n^0 = \frac{2\varepsilon^+}{\varepsilon^+ + \varepsilon^-}\Im_n^0 .$$

Сравним теперь в области D^+ две задачи Неймана для уравнения Лапласа [1]:

$$\begin{cases}\Delta\varphi^0=0\\ \dfrac{\partial\varphi^0}{\partial n}=-\Im_n^0/\varepsilon^+ \,|\, наL\end{cases} \quad\text{и}\quad \begin{cases}\Delta\varphi^+=0\\ \dfrac{\partial\varphi^+}{\partial n}=-\Im_n^+/\varepsilon^+ = -\dfrac{2}{\varepsilon^+ + \varepsilon^-}\Im_n^0 \;\; |\, наL\end{cases}$$

Легко увидеть, что

$$\frac{\partial\varphi^+}{\partial n}\Big/\frac{\partial\varphi^0}{\partial n}=k=\frac{2\varepsilon^+}{\varepsilon^+ + \varepsilon^-} наL.$$

Вследствие линейной зависимости решения задачи Неймана от краевых условий и

$$\vec{E}^{+} = k\vec{E}^{0},$$

что и требовалось доказать.

Таким образом, поле внешних источников диэлектрический цилиндр не деформирует, а всего лишь трансформирует с коэффициентом трансформации ''k''. В частности, при $\varepsilon^{+} \to \infty$ k=2.

Представленные результаты являются доказательством второй задачи Сирла в случае произвольного внешнего поля [4]. Аналогично можно провести и доказательство первой задачи Сирла.

Список литературы

1. Тихонов А.Н., Уравнения математической физики, М, ''Наука'', 1966. –724 с.
2. Тозони О.В., Расчет электромагнитных полей на вычислительных машинах, ''Техника'', Киев, 1967. –176 с.
3. Шимони К., Теоретическая электротехника, ''Мир'', 1964. –256 с.
4. Хэг Б., Электромагнитные расчеты, ГЭИ, М, 1934. –198 с.

Статья поступила в редакцию 15.14.2001 г.