

УДК 535. 317. 2

Дзедолик И.В., Лапаева С.Н.

ДИНАМИКА ГАУССОВЫХ ИМПУЛЬСОВ, ВОЗБУЖДАЕМЫХ НА ОСНОВНОЙ И НА ВЫСШИХ МОДАХ ОПТИЧЕСКОГО ВОЛОКНА

ВВЕДЕНИЕ

В настоящее время исследованию свойств импульсов, распространяющихся по оптическому волокну, уделяется особое внимание в связи с интенсивным развитием волоконно-оптических линий связи и импульсных волоконно-оптических датчиков [1-6]. Известно, что для импульсов с начальной модуляцией частоты возможна компрессия в волокне в результате трансформации фазовой модуляции в амплитудную [3]. В связи с этим представляет интерес исследование особенностей динамики волновых поверхностей модулированных и немодулированных импульсов гауссовой формы в оптических волокнах.

ПОЛЕВЫЕ УРАВНЕНИЯ

Рассмотрим распространение оптического импульса в поперечно неоднородной среде с осевой симметрией и материальной дисперсией – оптическом волокне с градиентным профилем показателя преломления. Предположим, что волноводные условия для импульса, профиль электрического поля которого при $z = 0$ задан

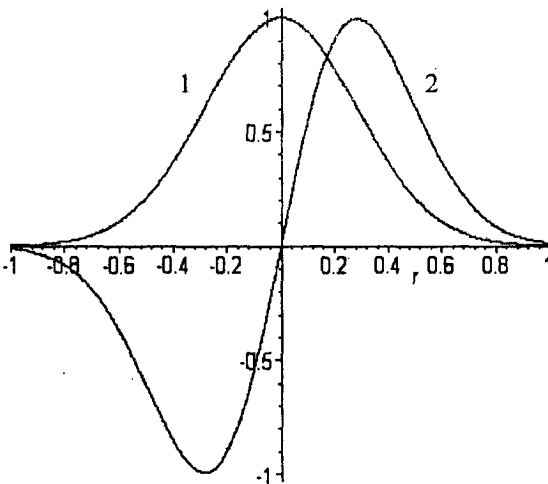


Рис.1. Профиль импульса в поперечном сечении волокна на низших (1) $l = 0$ и на высших модах (2) $l \neq 0$.

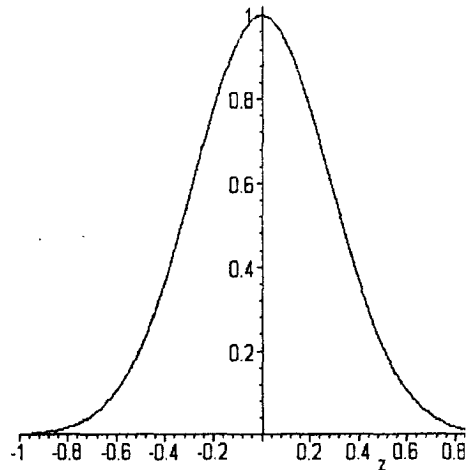


Рис.2. Профиль импульса в продольном сечении волокна.

$E_0(t)$, выполняются – поперечное распределение поля импульса описывается направляемыми модами, моды излучения высветились, а для несущей гармоники имеют место условия трансляции в волокне. В поперечной плоскости для всех компонент электромагнитного поля (\mathbf{E}, \mathbf{B}) выполняются условия излучения Зоммерфельда $\lim_{r \rightarrow \infty} [r(k\psi_j + \partial\psi_j / \partial r)] = 0$.

Исследуем динамику импульсов, возбуждаемых на основной моде (азимутальный индекс моды $\ell = 0$) и на высших модах ($\ell \neq 0$) $\psi \sim r^\ell e^{-r^2} e^{i\ell\phi} Z(z, t)$ [7] в оптическом волокне с параболическим профилем показателя преломления сердцевинки и безграничной оболочкой (рис.1-4).

Волновая поверхность гауссова импульса с $\ell = 0$ представляет собой плоскость, а волновая поверхность импульса с $\ell \neq 0$ – геликоид (рис.3), который

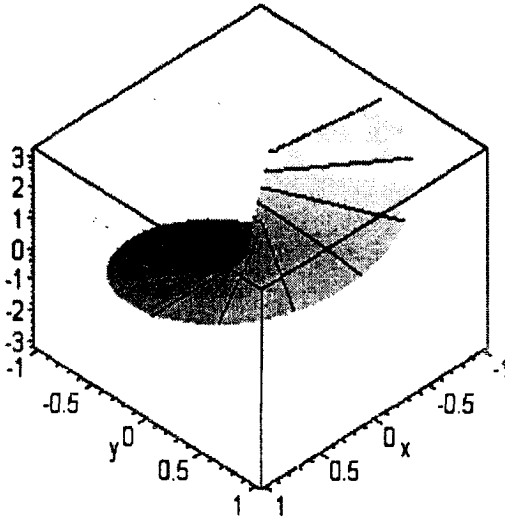


Рис.3. Волновая поверхность импульса с $\ell \neq 0$.

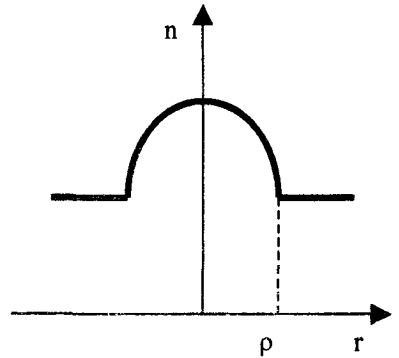


Рис. 4. Профиль оптического волокна.

при распространении импульса не вращается как целое, но деформируется (расширяется либо сжимается по продольной оси).

Для векторов электромагнитного поля запишем макроскопическую систему уравнений Максвелла [8]

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{B} &= \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}, & \nabla \mathbf{D} &= 0, \\ \nabla \times \mathbf{E} &= -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, & \nabla \mathbf{B} &= 0. \end{aligned} \tag{1}$$

Взаимодействие электромагнитного поля с диэлектрической средой представим в форме материального уравнения, задающего связь векторов электрической индукции \mathbf{D} и напряженности поля \mathbf{E} в линейном случае:

$$\mathbf{D}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) + 4\pi \int_{-\infty}^t \chi(\mathbf{r}, t', t) \mathbf{E}(\mathbf{r}, t') dt' \quad (2)$$

В материальном уравнении (2) учтено, что среда обладает временной (частотной) дисперсией. В стационарной среде, не меняющей своих свойств во времени под влиянием внешних причин, не связанных с действием электромагнитного поля, отклик зависит лишь от разности моментов времени $t - t' \equiv \tilde{t}$. Для стационарной среды перепишем материальное уравнение (2) в виде:

$$\mathbf{D}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) + 4\pi \int_0^{\infty} \chi(\mathbf{r}, \tilde{t}) \mathbf{E}(\mathbf{r}, t - \tilde{t}) d\tilde{t} \equiv \hat{\epsilon} \mathbf{E}. \quad (3)$$

Из системы полевых уравнений (1) получаем интегро-дифференциальное векторное уравнение для \mathbf{E} в форме:

$$\nabla^2 \mathbf{E} - \nabla(\nabla \mathbf{E}) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} - \frac{4\pi}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \int_0^{\infty} d\tilde{t} \chi(\mathbf{r}, \tilde{t}) \mathbf{E}(\mathbf{r}, t - \tilde{t}) = 0. \quad (4)$$

Из уравнения $\nabla \mathbf{D} = 0$ с учетом (3) следует, что $\hat{\epsilon} \nabla \mathbf{E} + (\nabla \hat{\epsilon}) \mathbf{E} = 0$. Пренебрегая поляризационными эффектами, полагаем $|\hat{\epsilon} \nabla \mathbf{E}| \gg |(\nabla \hat{\epsilon}) \mathbf{E}|$, то есть $\nabla \mathbf{E} \approx 0$. Тогда уравнение (4) представим в форме

$$\nabla^2 \mathbf{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = \frac{4\pi}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} (\hat{\chi}_1 \mathbf{E}), \quad (5)$$

где $\hat{\chi}_1 = \int_0^{\infty} dt_1 \chi_1(\mathbf{r}, t_1)$ – интегральный оператор.

Выделим в операторе Лапласа вторую производную по продольной координате $\nabla_{\perp}^2 + \partial^2 / \partial z^2$, умножим уравнение (5) на комплексно-сопряженное значение \mathbf{E}^* , а комплексно-сопряженное уравнение (4) – на \mathbf{E} и вычтем эти уравнения одно из другого. Проинтегрируем полученное уравнение по поперечному сечению:

$$\iint_S dS \left\{ (\mathbf{E}^* \nabla_{\perp}^2 \mathbf{E} - \mathbf{E} \nabla_{\perp}^2 \mathbf{E}^*) + \left[\mathbf{E}^* \left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \hat{\epsilon} \right) \mathbf{E} - \mathbf{E} \left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \hat{\epsilon} \right) \mathbf{E}^* \right] \right\} = 0$$

где $\hat{\epsilon} = 1 + 4\pi \hat{\chi}_1$. Учитывая условия излучения Зоммерфельда

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \left[r \left(\frac{\omega}{c} \mathbf{E} + \frac{\partial}{\partial r} \mathbf{E} \right) \right] = 0, \text{ получаем, что согласно второй двумерной формуле Грина}$$

$$\iint_S dS (\mathbf{E}^* \nabla_{\perp}^2 \mathbf{E} - \mathbf{E} \nabla_{\perp}^2 \mathbf{E}^*) = \oint_L dl [\mathbf{E}^* (\nabla \mathbf{E}) - \mathbf{E} (\nabla \mathbf{E}^*)] = 0$$

при $L \rightarrow \infty$. Представим вектор электрического поля в виде

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{e}(\mathbf{r}_\perp)Z(z, t),$$

подставим в уравнение (5), и, учитывая что $Z \neq 0$, $Z^* \neq 0$, получаем уравнение:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) Z = \frac{4\pi\hat{\alpha}_1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} Z, \quad (6)$$

$$\text{где } \hat{\alpha}_1 = \left(\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\infty dr r \hat{\chi}_1(\mathbf{r}_\perp) |\mathbf{e}(\mathbf{r}_\perp)|^2 \right) \left(\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\infty dr r |\mathbf{e}(\mathbf{r}_\perp)|^2 \right)^{-1}.$$

ВОЛНОВОЙ ПАКЕТ

Будем искать полевые компоненты импульса, распространяющегося в параболическом волокне $1 + 4\pi\hat{\chi} = \int_0^\infty d\tilde{t} \tilde{n}_1^2(\tilde{t})(1 - 2\Delta(\tilde{t})r^2/\rho^2)$, (где n_1 - показатель преломления на оси сердцевинки, $\Delta = (n_1^2 - n_2^2)/2n_1^2$ - параметр высоты профиля волокна, n_2^2 - показатель преломления оболочки, ρ - радиус сердцевинки волокна). Решения уравнений для поперечной структуры поля $\mathbf{e}(\mathbf{r}_\perp)$ в виде мод параболического волокна хорошо известны [7]. Будем искать решения уравнения (6) для огибающей импульса, заданного в сечении волокна $z = 0$. Найдем частотный спектр импульса $E_0(t)$ при $z = 0$:

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} E_0(t') \exp(-i\omega t') dt'. \quad (7)$$

Учитывая, что каждая гармоническая волна распространяется в линейной среде независимо друг от друга, решение уравнения для продольного фактора $Z(z, t)$ (6) ищем как суперпозицию гармоник $F(\omega) \exp\{i[\omega t - \beta(\omega)z]\}$ [8]:

$$Z(z, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) \exp\{i[\omega t - \beta(\omega)z]\} d\omega. \quad (8)$$

Подставляя выражение для спектра (7) в (8), получаем выражение для $Z(z, t)$ с учетом граничных условий

$$Z(z, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} E_0(t') \exp\{i[\omega(t - t') - \beta(\omega)z]\} dt' d\omega. \quad (9)$$

Решение (9) возможно получить в замкнутой форме, если вычислить двойной интеграл с учетом точного закона дисперсии $\beta = \beta(\omega)$, который в общем случае не известен.

Рассмотрим динамику импульса с пологим фронтом и относительно большой длительностью – волнового пакета. Предположим, что частотный спектр $\Delta\omega$ импульса достаточно узкий. Тогда приближенные решения для $Z(z, t)$ можно найти, разлагая постоянную распространения в ряд Тейлора в окрестности несущей частоты ω_0 [8]:

$$\beta(\omega) = \beta(\omega_0) + \left. \frac{\partial\beta}{\partial\omega} \right|_{\omega=\omega_0} (\omega - \omega_0) + \frac{1}{2} \left. \frac{\partial^2\beta}{\partial\omega^2} \right|_{\omega=\omega_0} (\omega - \omega_0)^2 + \dots \quad (10)$$

и подставляя ряд (11) в решение (9), получаем выражения для Z в первом, втором и т.д. приближениях теории дисперсии, соответствующие удерживаемым членам. Тогда, взяв внутренний интеграл по ω , а затем интеграл по t' , получаем решения в замкнутой форме в соответствующих приближениях теории дисперсии.

Во втором приближении теории дисперсии получаем выражение для Z в виде:

$$Z(z, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) \exp\left\{i\left[t - \frac{\partial\beta}{\partial\omega} z\right](\omega - \omega_0) - \frac{i}{2} \frac{\partial^2\beta}{\partial\omega^2} z\right\} d\omega \times \exp[i(\omega_0 t - \beta(\omega_0) z)] \equiv A(z, t) \exp[i(\omega_0 t - \beta(\omega_0) z)]. \quad (11)$$

ГАУССОВ ИМПУЛЬС БЕЗ НАЧАЛЬНОЙ ДЕВИАЦИИ ЧАСТОТЫ

Предположим, что спектр импульса ограничен, т.е. импульс не модулирован по частоте, начальная частотная девиация отсутствует. Огибающая импульса имеет гауссову форму при $z = 0$:

$$A_0(t) = E_0 \exp(-t^2 / T_0^2), \quad (12)$$

где T_0 - начальная длительность импульса. На рис.5 представлена огибающая импульса без начальной девиации частоты в сечении $z = 0$.

Подставляя выражение для граничной формы импульса $A_0(t)$ при $z = 0$ (12) в (11), получаем выражение для огибающей импульса в сечении волокна z :

$$A(z, t) = \frac{E_0}{(1 + \bar{z}^2)^{1/4}} \exp\left[-\frac{(t - \bar{z}L_d / v_g)^2}{T_0^2 (1 + \bar{z}^2)}\right] \times \exp\{i\vartheta\} \quad (13)$$

$$\text{где } \vartheta = \frac{(t - L_d \bar{z} / v_g)^2 \bar{z}}{T_0^2 (1 + \bar{z}^2)} - \frac{1}{2} \arctg(\bar{z})$$

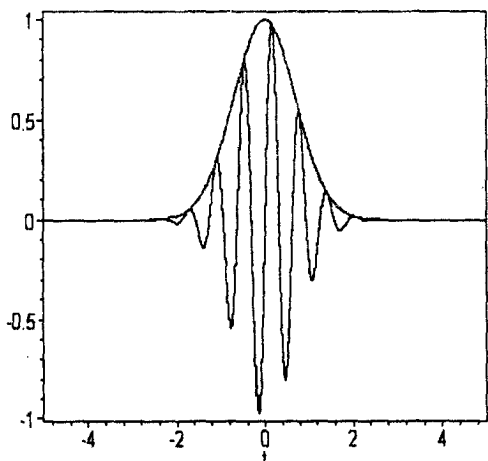


Рис.5. Огибающая импульса без начальной модуляции частоты в волокне при $z = 0$

- фазовая добавка, возникающая в результате дисперсии в волокне, $\bar{z} = z/L_D$, $L_D = T_0^2/4D$ - дисперсионная длина для импульса, на которой его длительность увеличивается в $\sqrt{2}$ раз, $D = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \beta}{\partial \omega^2}$.

На рис. 6 представлена динамика огибающей импульса без начальной частотной модуляции $|A_e|$ (13) в сердцевине градиентного волокна: при увеличении нормализованной длины $\bar{z} = z/L_d$ амплитуда импульса монотонно уменьшается, а длительность импульса $2T = 2T_0[1 + (z/L_d)^2]^{1/2}$ по нормализованному времени $\tau_0 = \tau/T_0$ увеличивается, что соответствует поведению волнового пакета в линейной среде. Длительность импульса $2T$ на длине волокна $z = \text{const}$ зависит от профиля волокна, от величины дисперсии групповой скорости и от начальной длительности импульса, т.к. эти параметры определяют дисперсионную длину импульса:

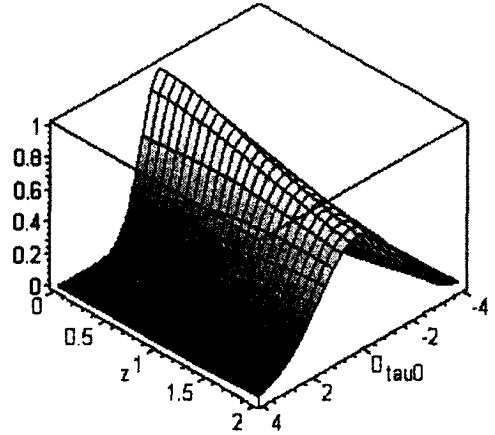
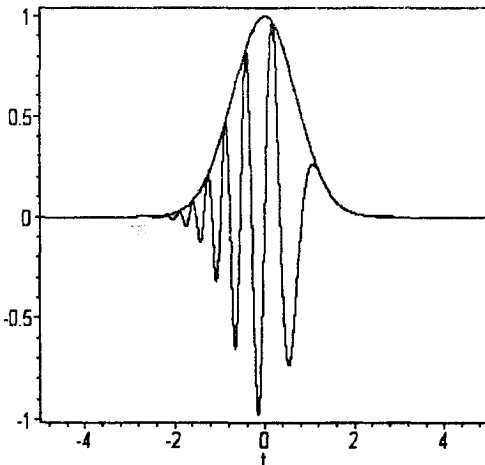


Рис.6. Огибающая импульса без начальной модуляции частоты при его распространении в волокне: $\bar{z} = z/L_D, \tau_0 = (t - z/v_g)/T_0$.



спад импульса (рис.7) и наоборот.

$$L_d = \frac{T_0^2}{4D} = \frac{T_0^2}{2} \left(\frac{\partial^2 \beta}{\partial \omega^2} \right)^{-1} \quad (14)$$

ГАУССОВ ИМПУЛЬС С НАЧАЛЬНОЙ ДЕВИАЦИЕЙ ЧАСТОТЫ

Если гауссов импульс имеет начальную частотную девиацию, его огибающая при $z = 0$ может быть представлена в форме

$$A_0(t) = E_0 \exp(-t^2/T_0^2 - i\omega_0 vt^2). \quad (15)$$

Когда знак частотного параметра v больше нуля, частота уменьшается к

Рис.7. Импульс с начальной с начальной модуляцией частоты при $z = 0$.

Подставляя $A_0(t)$ (15) в выражение (11), получаем огибающую импульса с начальной частотной модуляцией в сердцевине волокна в сечении z :

$$A(z, t) = \frac{E_0}{[(1 - \gamma \bar{z})^2 + \bar{z}^2]^{1/4}} \exp\left[-\frac{(t - \bar{z}L_d / v_g)^2}{T_0^2 [(1 - \gamma \bar{z})^2 + \bar{z}^2]}\right] \exp\{i\vartheta\}, \quad (16)$$

где
$$\vartheta = \frac{(t - \bar{z}L_d / v_g)^2 [\bar{z}(1 + \gamma^2) - \gamma]}{T_0^2 [(1 - \gamma \bar{z})^2 + \bar{z}^2]} - \frac{1}{2} \operatorname{arctg}\left(\frac{\bar{z}}{1 - \gamma \bar{z}}\right), \quad \gamma = v\omega_0 T_0^2$$

коэффициент длительности импульса.

Рис.8 представляет динамику огибающей импульса с начальной частотной модуляцией $|A_e|$ (16) при распространении импульса в сердцевине волокна в случае $\gamma=1$: амплитуда импульса нарастает на нормализованной длине $\bar{z} = 0.5$. При увеличении коэффициента γ скорость изменения амплитуды импульса при его распространении увеличивается. Например, при $\gamma = 10$ компрессия импульса с начальной девиацией частоты отсутствует.

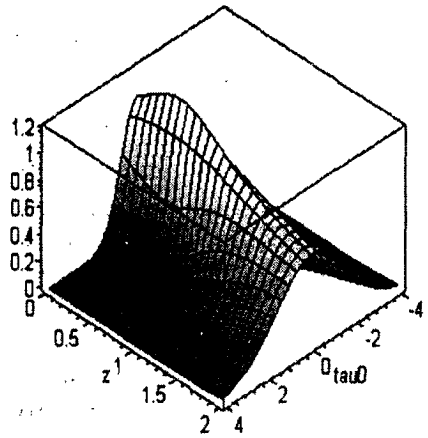


Рис.8. Огибающая импульса в волокне с начальной девиацией частоты: $\gamma = 1$.

Длительность импульса с начальной частотной модуляцией $2T = 2T_0 [(1 - \gamma z / L_D)^2 + (z / L_D)^2]^{1/2}$ при его распространении в сердцевине волокна в случае $\gamma = 1$, когда $D > 0$ (нормальная дисперсия), имеет минимум на длине $z_{\min} = \gamma T_0^2 / 4D(1 + \gamma^2)$, а амплитуда импульса - максимум. Таким образом, импульс с начальной частотной девиацией «фокусируется во времени» в линейной среде. Мощность импульса будет нарастать и возможно возникновение нелинейных эффектов, когда амплитуда достигает значения, при котором показатель преломления волокна начинает зависеть от напряженности поля.

ВОЛНОВАЯ ПОВЕРХНОСТЬ ИМПУЛЬСА

Динамика импульса характеризуется изменением во времени и в пространстве его комплексной огибающей. Скорость адиабатического изменения огибающей импульса зависит от величины возмущений в волокне, а величина возмущений определяется в случае идеальной симметрии волокна параметром высоты его

профиля Δ . Таким образом, адиабатическое изменение показателя преломления волокна в радиальном направлении, пропорциональное $\sqrt{\Delta}$, вызывает деформацию комплексной огибающей импульса. Это приводит к изменению формы импульса (его амплитуды) и волновой поверхности (фазы).

При стремлении начальной длительности импульса к бесконечности - в случае монохроматической волны фазовая добавка ϑ , обусловленная временной ограниченностью импульса, стремится в пределе к нулю. И наоборот, для коротких импульсов фазовая добавка ϑ будет велика на больших длинах распространения импульса. Причем, фазовые добавки из-за временной ограниченности импульса для максимума амплитуды импульса, движущегося с групповой скоростью v_g , для фронта и для спада различны по величине. Скорость волновой поверхности - фазовую скорость определим, взяв производную по времени от фиксированного значения фазы $\phi = \omega t - \beta z + k\ell\phi + \vartheta(z, t) = \text{const}$, т.е. «метки на волновой поверхности». Для гауссова импульса без начальной девиации частоты фазовая скорость равна

$$v_\phi = \left[\omega_0 + \frac{2\bar{z}\bar{\tau}}{T_0(1+\bar{z}^2)} \right] \times \left[\beta + \frac{2\bar{z}\bar{\tau}}{v_g T_0(1+\bar{z}^2)} - \frac{\bar{\tau}^2}{L_D(1+\bar{z}^2)} + \frac{2\bar{z}^2\bar{\tau}^2}{L_D(1+\bar{z}^2)^2} + \frac{1}{2L_D(1+\bar{z}^2)} \right]^{-1}, \quad (17)$$

а для гауссова импульса с начальной девиацией частоты

$$v_\phi = \left\{ \omega_0 + \frac{2[\bar{z}(1+\gamma^2) - \gamma]\bar{\tau}}{T_0[(1-\gamma\bar{z})^2 + \bar{z}^2]} \right\} \times \left\{ \beta + \frac{2[\bar{z}(1+\gamma^2) - \gamma]\bar{\tau}}{v_g T_0[(1-\gamma\bar{z})^2 + \bar{z}^2]} - \frac{\bar{\tau}^2(1+\gamma^2)}{L_D[(1-\gamma\bar{z})^2 + \bar{z}^2]} + \frac{2[\bar{z}(1+\gamma^2) - \gamma]^2\bar{\tau}^2}{L_D[(1-\gamma\bar{z})^2 + \bar{z}^2]^2} + \frac{1}{2L_D[(1-\gamma\bar{z})^2 + \bar{z}^2]} \right\}^{-1}, \quad (18)$$

где $\bar{z} = z/L_D$, $\bar{\tau} = (t - \bar{z}L_D/v)/T_0$. Из (17), (18) следует, что скорости волновой поверхности для вершины ($\bar{\tau} = 0$), фронта ($\bar{\tau} = 1$) и спада ($\bar{\tau} = -1$) импульса изменяются при распространении его вдоль оси z (см. рис.9, 10).

На определенной длине z_{invers} происходит инверсия волновой поверхности импульса с начальной девиацией частоты: волновая поверхность спада импульса обгоняет волновой фронт импульса. При этом их скорости сравниваются $v_\phi(\tau = -1) = v_\phi(\tau = 1)$ на нормированной длине $\bar{z} = 0.5$; амплитуда импульса достигает максимального значения, а его длительность - минимального (см. рис.6), т.е. $z_{\text{invers}} = z_{\text{min}}$.

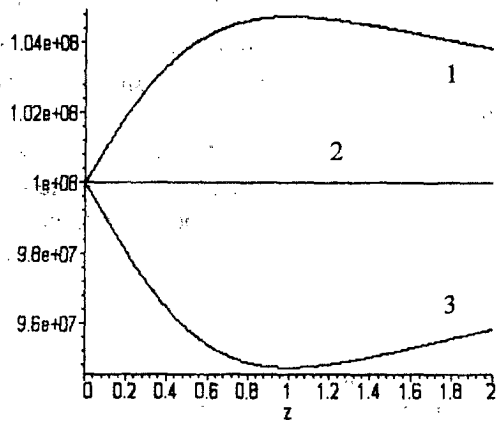


Рис.9.Скорость волновой поверхности импульса без начальной модуляции частоты для: (1)- фронта; (2)- вершины; (3)- спада.

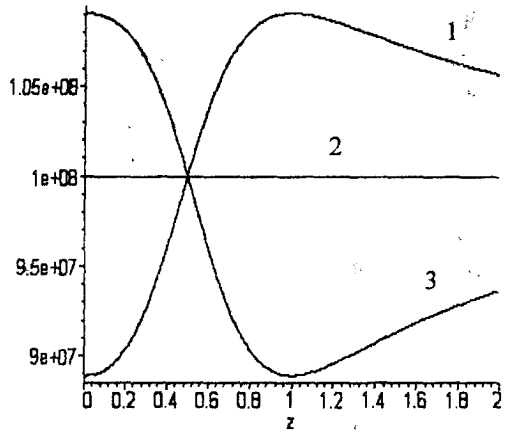


Рис.10. Скорость волновой поверхности импульса с начальной модуляцией частоты для: (1)- фронта; (2)- вершины; (3)- спада.

Инверсия волнового фронта в волокне обусловлена различной скоростью распространения частотных гармоник импульса с начальной модуляцией частоты в линейной среде с материальной дисперсией. Низкочастотные гармоники, сгруппированные вблизи спада импульса, обгоняют высокочастотные гармоники, сгруппированные вблизи его фронта.

Таким образом, при соответствующей начальной модуляции частоты импульсов возможно на заданной длине волоконно-оптической линии связи получить короткие импульсы с крутым фронтом, что позволит повысить качество передаваемого сигнала и, соответственно, уменьшить число ошибок при приеме. Анализ динамики фазы модулированного импульса и инверсии его волновой поверхности в зависимости от изменения параметров волокна дает возможность проектировать волоконно-оптические импульсные датчики, в которых устранено влияние помех, вызванных вибрацией, изменением температуры и т.п.

Авторы благодарят А.В.Воляра и А.Б.Гопмана за плодотворные обсуждения работы.

Список литературы

1. Nye J.F., Berry M.V. Dislocation in wave trains // Proc. R. Soc. London, -1974.-А. 336.-pp.165-190.
2. Jurgensen K. Transmission of Gaussian pulses through monomode dielectric optical waveguides // Applied Optics.- January 1977.- 16, No.1.- pp.22-23.
3. Ахманов С.А., Выслоух В.А., Чиркин А.С. Самовоздействие волновых пакетов в нелинейной среде и генерация фемтосекундных лазерных импульсов // Успехи физических наук.- 1986.- 149, вып.3, С. 451-509.
4. Воляр А.В., Фадеева Т.А. Вихревая природа мод оптического волокна // Письма в Журнал Технической Физики. III.- 1996.- 22, вып.17. С.- 69-74.

ДИНАМИКА ГАУССОВЫХ ИМПУЛЬСОВ, ВОЗБУЖДАЕМЫХ НА ОСНОВНОЙ И НА ВЫСШИХ МОДАХ ОПТИЧЕСКОГО ВОЛОКНА

5. Basistiy I.V., Soskin M.S., Vasnetsov M.V. Nonlinear singular optics //Opt. Com.- 1995.- 119, pp.604-612.
6. Dzedolik I.V., Volyar A.V. Optical vortex train dynamics in a medium with anomalous dispersion //Proceedings of SPIE.- 1999.- 3904-11, pp.83-91.
7. Снайдер А.В., Лав Д.В. Теория оптических волноводов. -Москва: Радио и связь, 1987. - 487 с.
8. Виноградова М.Б., Руденко О.И., Сухоруков А.П. Теория волн. - Москва: Наука, 1990.- 340 с.