Ученые записки Таврического национального университета им. В. И. Вернадского

Серия "МАТЕМАТИКА" № 1 (2001) 39 – 42

УДК 517.9:532

К ЗАДАЧЕ О НОРМАЛЬНЫХ КОЛЕБАНИЯХ ОДНОЙ ЧАСТИЧНО ДИССИПАТИВНОЙ ГИДРОСИСТЕМЫ

Закора Д. А.

Постановка задачи

Рассмотрим неподвижный контейнер частично заполненный системой из $m+1$-й жидкости. Жидкости предполагаются тяжелыми, несжимаемыми и несмешивающимися. При этом нижняя, по отношению к действию силы тяжести, жидкость считается вязкой (динамический коэффициент вязкости μ), а остальные идеальными. Соответствующая эволюционная задача изучалась в [1] и [2]. Изучение нормальных колебаний этой гидросистемы приводит к следующей спектральной задаче:

$$\begin{gathered}\lambda^2 \begin{pmatrix} T & 0 \\ 0 & C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix} - \lambda\mu \begin{pmatrix} I_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix} + \\ +g \begin{pmatrix} B & -\mu^{\varepsilon} Q^* \\ -\mu^{-\varepsilon} Q & I_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (\psi_1, \psi_2)^t \in H_1 \oplus H_2,\end{gathered} \tag{3}$$

где $0 < T = T^* \in \mathfrak{S}_{p_T}$, $0 < C = C^* \in \mathfrak{S}_{p_C}$, $B = \widehat{B} + Q^* Q$,

$$0 \leqslant \widehat{B} = \widehat{B}^* \in \mathfrak{S}_{p_B}, \quad Q \in \mathfrak{S}_\infty, \quad 0 < \varepsilon < 1, \quad \mu > 0,$$

g — ускорение свободного падения, I_1 и I_2 — это единичные операторы в сепарабельных гильбертовых пространствах H_1 и H_2 соответственно. Функции распределения собственных значений операторов T, C и $\widehat{B}$ имеют степенную асимптотику.

О свойствах спектра, свойствах базисности и кратной полноты части корневых элементов спектральной задачи

Введем следующие обозначения для областей комплексной плоскости:

$$\Lambda_{R,\varepsilon} := \{\, \lambda \,|\, |\lambda| > R, \quad |\arg\lambda| < \varepsilon \,\},$$

$$\Lambda^{\pm}_{R,\varepsilon} := \{\, \lambda \,|\, |\lambda| > R, \quad |\arg\lambda \mp \pi/2| < \varepsilon \,\} \quad (\, -\pi < \arg\lambda \leqslant \pi \,).$$

Доказательство следующей теоремы о свойствах решений задачи (3) довольно громоздко и потому здесь не приводится. Оно основано на общих теоремах из спектральной теории операторных пучков [3]. В частности, на теоремах о базисности части корневых элементов и теоремах об асимптотическом поведении ветвей собственных значений. Полное доказательство будет проведено лишь для утверждения о кратной полноте части корневых элементов спектральной задачи (3).

Теорема 1. *Имеют место следующие утверждения:*
1. Весь ненулевой спектр пучка (3) состоит из конечнократных собственных значений и расположен в правой открытой полуплоскости симметрично относительно действительной оси. Точками сгущения спектра являются точки нуль и бесконечность.
2. Для любого фиксированного t_0 такого, что $0 < t_0 < g^{1/2}\|C\|^{-1/2}$, и достаточно большой вязкости $\mu = \mu(t_0)$ спектр задачи (3), лежащий в круге радиуса t_0, принадлежит интервалу $[0, t_0)$, а собственные элементы задачи (3), отвечающие собственным значениям из интервала $(0, t_0)$, после проектирования на $H_1 \ominus Ker\widehat{B}$, образуют p-базис в пространстве $H_1 \ominus Ker\widehat{B}$ при $p = p_B$.
3. Для любого достаточно малого $\varepsilon > 0$ собственные элементы задачи (3), отвечающие собственным значениям из интервала $(0, \varepsilon)$, после проектирования на $H_1 \ominus Ker\widehat{B}$, образуют базис Рисса в подпространстве $H_1 \ominus Ker\widehat{B}$ с точностью до конечного дефекта.
4. Точка нуль является предельной точкой спектра задачи (3). Для соответствующей ветви собственных значений $\{\lambda_k^0\}_{k=1}^{\infty}$ справедлива асимптотическая формула $\lambda_k^0 = g\mu^{-1}\lambda_k(\widehat{B})(1 + o(1))$ $(k \to \infty)$.
5. Для любого малого $\varepsilon > 0$ и достаточно большого $R = R(\varepsilon)$ задача (3) имеет ветвь $\{\lambda_k^{\infty}\}_{k=1}^{\infty}$ собственных значений расположенных в секторе $\Lambda_{R,\varepsilon}$, за исключением, быть может, конечного числа. Для этой ветви справедлива асимптотическая формула: $\lambda_k^{\infty} = \mu\lambda_k(T^{-1})(1 + o(1))$ $(k \to \infty)$.
6. Для любого малого $\varepsilon > 0$ и достаточно большого $R = R(\varepsilon)$ задача (3) имеет две комплексно-сопряженные ветви $\{\lambda_k^{\pm i}\}_{k=1}^{\infty}$ собственных значений, расположенных в секторах $\Lambda_{R,\varepsilon}^{+}$ и $\Lambda_{R,\varepsilon}^{-}$, за исключением, быть может, конечного числа. Для этих ветвей справедлива асимптотическая формула:

$$\lambda_k^{\pm i} = \pm i g^{1/2}\lambda_k^{1/2}(C^{-1})(1 + o(1)) \quad (k \to \infty).$$

Следующая теорема доказывается в общей теории операторных пучков для оператора A, который является самосопряженным полным оператором конечного порядка. Нам в дальнейшем понадобится соответствующее утверждение для случая, когда A — нормальный полный оператор конечного порядка.

Теорема 2. *Пусть $L(\lambda) := \lambda I - A - B(\lambda)$, где $B(\lambda) := \sum_{k=1}^{\infty}\lambda^k B_k$ — голоморфная в круге $|\lambda| \leqslant r$ оператор-функция. Пусть справедливо следующее условие:*

$$\exists\, t \in (0, r): \quad \frac{\|A\|}{t} + \sum_{k=1}^{\infty} t^{k-1}\|B_k\| < 1, \tag{4}$$

$B_1 \in \mathfrak{S}_{\infty}$, A — нормальный оператор, спектр которого лежит на конечном числе лучей, $KerA = \{0\}$, $A \in \mathfrak{S}_p$ при некотором $p \in (0, \infty)$. Тогда система собственных и присоединенных элементов пучка $L(\lambda)$, отвечающих собственным значениям из круга $|\lambda| \leqslant t < r$, полна в гильбертовом пространстве H.

Доказательство. Так как выполнено условие (4), достаточное для факторизации пучка $L(\lambda)$, то по теореме 23.4 из [3] для пучка $L(\lambda)$ справедливо представление $L(\lambda) = A_+(\lambda)(\lambda I - Z)$, где $A_+(\lambda)$ — голоморфна и голоморфно обратима при $|\lambda| \leqslant t$. При этом спектр оператора Z лежит в круге $|\lambda| < t$. В этой области задача сводится к задаче на собственные значения для оператора Z. Распишем подробно представление для пучка $L(\lambda)$:

$$\lambda I - A - \sum_{k=1}^{\infty} \lambda^k B_k = \left(A_+(0) + A'_+(0)\lambda + \ldots\right)(\lambda I - Z). \tag{5}$$

Из равенства (5), приравнивая коэффициенты при нулевой степени λ, получим $-A = -A_+(0)Z$, откуда следует, что $Z = A_+^{-1}(0)A \in \mathfrak{S}_p$. Приравнивая в (5) коэффициенты при первой степени λ, получим $A_+(0) = I - B_1 + A'_+(0)Z = I - T$, где $T \in \mathfrak{S}_\infty$. Отсюда $A_+^{-1}(0) = (I - T)^{-1} = I + S$, где $S \in \mathfrak{S}_\infty$. Из последнего соотношения следует, что $Z = (I + S)A$. Таким образом, оператор Z есть слабое возмущение нормального оператора A. Учитывая свойства оператора A и обратимость оператора $I + S$, по теореме 4.2 из [3] получаем, что система собственных и присоединенных элементов оператора Z, а следовательно и пучка $L(\lambda)$ в указанной области, полна в H. □

При формулировке утверждения о полноте для простоты будем считать все собственные значения λ_k однократными. Каждому такому λ_k и отвечающему ему собственному вектору $(\psi_{1k}, \psi_{2k})^t$ пучка (3) поставим в соответствие вектор $\Psi_k := (\psi_{1k}, \psi_{2k}, i\lambda_k g^{-1/2} C^{1/2} \psi_{2k})^t$ из пространства $\widehat{H} := H_1 \oplus H_2 \oplus H_2$.

Теорема 3. *При достаточно большой вязкости μ система векторов Ψ_k, отвечающая собственным значениям, лежащим вне круга радиуса $R = R(\mu)$, образует полную систему в $\widehat{H}$.*

Доказательство. Перепишем задачу (3) в виде системы двух уравнений и сделаем во втором уравнении замену $i\lambda g^{-1/2} C^{1/2} \psi_2 = \widehat{\psi}$. Приходим к следующей системе уравнений:

$$\begin{cases} I_1\psi_1 - \lambda\mu^{-1}T\psi_1 - g(\lambda\mu)^{-1}B\psi_1 + g\mu^{\varepsilon}(\lambda\mu)^{-1}Q^*\psi_2 = 0 \\ I_2\psi_2 - i\lambda g^{-1/2}C^{1/2}\widehat{\psi} - \mu^{-\varepsilon}Q\psi_1 = 0 \\ I_2\widehat{\psi} - i\lambda g^{-1/2}C^{1/2}\psi_2 = 0. \end{cases} \tag{6}$$

Систему (6) удобно записать в виде одного векторно-матричного уравнения в гильбертовом пространстве $\widehat{H}$:

$$\widetilde{I}\Psi - \lambda\widetilde{H}\Psi - \mu^{-\varepsilon}\widetilde{Q}_1\Psi + \lambda^{-1}\mu^{\varepsilon-1}\widetilde{Q}_2\Psi = 0, \tag{7}$$

где $\widetilde{I}$ — единичный оператор в $\widehat{H}$, а ненулевые коэффициенты остальных операторных блоков и искомый вектор определены следующим образом:

$$(\widetilde{Q}_1)_{2,1} := Q, \quad (\widetilde{Q}_2)_{1,1} := -\mu^{-\varepsilon}B, \quad (\widetilde{Q}_2)_{1,2} := Q^*,$$

$$(\widetilde{H})_{1,1} := \mu^{-1}T, \quad (\widetilde{H})_{2,3} = (\widetilde{H})_{3,2} := ig^{-1/2}C^{1/2}, \quad \Psi := (\psi_1, \psi_2, \widehat{\psi})^t.$$

Произведем в уравнении (7) замену спектрального параметра $\lambda = \widetilde{\lambda}^{-1}$ и умножим обе части полученного уравнения на $\widetilde{\lambda}$. Мы придем к следующей спектральной задаче:

$$\widetilde{\lambda}\widetilde{I}\Psi - \widetilde{H}\Psi - \widetilde{\lambda}\mu^{-\varepsilon}\widetilde{Q}_1\Psi + \widetilde{\lambda}^2\mu^{\varepsilon-1}\widetilde{Q}_2\Psi = 0. \tag{8}$$

Оператор $\widetilde{H}$ в задаче (8) является полным нормальным оператором конечного порядка, спектр которого, как нетрудно проверить, лежит на трех лучах. Для факторизации пучка операторов задачи (8) достаточно, что бы существовало число $t > 0$ такое, что для него справедливо неравенство

$$t^2\mu^{\varepsilon-1}\|\widetilde{Q}_2\| + t\left(\mu^{-\varepsilon}\|\widetilde{Q}_1\| - 1\right) + \|\widetilde{H}\| < 0. \tag{9}$$

Рассмотрим решения отвечающего неравенству (8) квадратного уравнения:

$$t_{\pm} = \frac{1 - \mu^{-\varepsilon}\|\widetilde{Q}_1\| \pm \sqrt{(1 - \mu^{-\varepsilon}\|\widetilde{Q}_1\|)^2 - 4\mu^{\varepsilon-1}\|\widetilde{H}\| \cdot \|\widetilde{Q}_2\|}}{2\mu^{\varepsilon-1}\|\widetilde{Q}_2\|}$$

Для выполнения условия факторизации (9) необходимо, что бы $t_+ > t_- > 0$. Так как $0 < \varepsilon < 1$, то нетрудно видеть, что при достаточно большой вязкости μ это условие выполнится и, таким образом, справедливо неравенство (9). Применяя теорему 2 к задаче (8), после обратной замены спектрального параметра получаем утверждение данной теоремы. □

Автор выражает благодарность научному руководителю профессору Н. Д. Копачевскому за постоянное внимание и помощь в работе.

Список литературы

1. Закора Д. А. *Малые движения одной частично диссипативной гидросистемы* //(Симферополь, Симф. госуниверситет) — Деп. в Укр ИНТЕИ 25.03.97, N 267-Уі 97.
2. Kopachevsky N. D., Zakora D. A. *Problems on small movements of partially dissipative hydrosistems.* //Mark Krein Intern. Conference. Operator Theory and Appl. August 18-22, 1997, Odessa, Ukraine, Book of Abstracts, p. 55.
3. Маркус А. С. *Введение в спектральную теорию полиномиальных операторных пучков* "Штиинца", 1986.– 260 с.