Ученые записки Таврического национального университета им. В. И. Вернадского

Серия "МАТЕМАТИКА" № 1 (2001) 34 – 35

УДК 517.9:532

О СОБСТВЕННЫХ КОЛЕБАНИЯХ СЖИМАЕМОЙ СТРАТИФИЦИРОВАННОЙ ЖИДКОСТИ

Вронский Б. М.

Рассмотрим трехмерную область Ω, заполненную идеальной сжимаемой устойчиво стратифицированной жидкостью. Малые движения изучаемой системы описываются следующими уравнениями, краевыми и начальными условиями (см., например, [1]):

$$\frac{\partial^2 \vec{w}}{\partial t^2} = -\frac{1}{\rho_0}\nabla p - \frac{1}{\rho_0} g\rho\vec{k} \quad (\text{в } \Omega), \tag{1}$$

$$\rho + w_z\rho_0' + \rho_0 \operatorname{div}\vec{w} = 0 \quad (\text{в } \Omega), \tag{2}$$

$$\rho + w_z\rho_0' = c^{-2}(p - g w_z \rho_0) \quad (\text{в } \Omega), \tag{3}$$

$$\vec{w}\cdot\vec{n} = 0 \quad (\text{на } S), \tag{4}$$

$$\vec{w}(\vec{x},0) = \vec{w}^0(\vec{x}); \quad \frac{\partial \vec{w}(\vec{x},0)}{\partial t} = \vec{w}^1(\vec{x}). \tag{5}$$

Условие устойчивой стратификации означает, что выполнено неравенство:

$$0 < N_-^2 \le N^2(z) \le N_+^2 < \infty.$$

где

$$N^2(z) = -g\frac{\rho_0'(z)}{\rho_0(z)} - (g/c)^2$$

Выражение $N^2(z)$ называется квадратом частоты плавучести.

В дальнейшем мы будем рассматривать собственные колебания системы, то есть решения задачи (1)–(3), зависящие от времени по закону $\exp(i(t))$. При этом искомые вектор-функции считаются элементами гильбертова пространства $\vec{L}_2(\Omega,\rho_0)$. С помощью метода ортогонального проектирования исследуемая спектральная задача приводится к задаче на собственные значения для матричного операторного пучка следующего вида:

$$\lambda\begin{pmatrix}\vec{u}\\ \Phi\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}A_{11} & A_{12}\\ A_{21} & A_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\vec{u}\\ \Phi\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0 & B_{12}\\ B_{21} & B_{22}+B_0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\vec{u}\\ \Phi\end{pmatrix} \tag{6}$$

Сначала рассматриваются значения параметра $\lambda \in [N_0^2; +\infty]$, где N_0^2 - максимум квадрата частоты плавучести. В этом случае спектральная задача (6) приводится к задаче на собственные значения для самосопряженного операторного пучка вида (с помощью методики, изложенной в монографии [2])):

$$L(\lambda)\zeta \equiv (I + S - \lambda B_0^{-1} + \lambda^{-1} F(\lambda))\zeta = 0, \tag{7}$$

Здесь операторы S, B_0^{-1} – самосопряженные положительные и вполне непрерывные, а оператор-функция $F(\lambda)$ принимает значения на множестве самосопряженных компактных операторов.Доказаны следующие утверждения:

Теорема 1. *При выполнении условия устойчивой стратификации спектр задачи (7) вещественный и состоит из последовательности конечнократных собственных значений $\{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$,*

$k = 1, 2, \ldots$ *с асимптотическим поведением*

$$\lambda_k = \lambda_k(B_0)(1 + o(1)) \quad (k \to \infty).$$

Соответствующие им собственные векторы имеют характер акустических волн.

Теорема 2. *Система собственных векторов операторного пучка (7) образует p-базис в некотором гильбертовом пространстве.*

Рассмотрим теперь спектральную зону $\lambda \in [0; N_0^2]$. Доказана следующая

Теорема 3. *Предельный спектр задачи (7) совпадает с отрезком $\lambda \in [0; N_0^2]$. С физической точки зрения дискретному спектру задачи отвечают волны, порожденные сжимаемостью, а предельному спектру — волны, порожденные наличием стратификации.*

Для начально-краевой задачи (1)–(4) при выполнении условий $\vec{v}_0 \in \bar{L}_2(\Omega, \rho_0)$, $p_0 \in H(\Omega)$, $\rho^0 \in H(\Omega)$ доказывается корректная разрешимость и наличие решения с конечной кинетической энергией.

$$\int_\Omega \rho_0(z)|\vec{v}|^2\, d\Omega + c^{-2}\int_\Omega \rho_0^{-1}(z)|p|^2\, d\Omega + g^2\int_\Omega \rho_0^{-1}(z)N^{-2}(z)(c^{-2}p - \rho)^2\, d\Omega =$$

$$= \int_\Omega \rho_0(z)|\vec{v}_0|^2\, d\Omega + c^{-2}\int_\Omega \rho_0^{-1}(z)|p_0|^2\, d\Omega + g^2\int_\Omega \rho_0^{-1}(z)N^{-2}(z)(c^{-2}p_0 - \rho^0)^2\, d\Omega.$$

Список литературы

1. Бреховских Л. М., Гончаров В. В. *Введение в механику сплошных сред.* — М. : Наука, 1982. — 335 с.
2. Копачевский Н. Д., Крейн С. Г., Нго Зуй Кан. *Операторные методы в линейной гидродинамике: эволюционные и спектральные задачи.* — М.: Наука, 1989. — 416 с.