Ученые записки Таврического национального университета им. В. И. Вернадского

Серия "МАТЕМАТИКА" № 1 (2001) 87 – 92

УДК 517.947

НЕСКОЛЬКО ТЕОРЕМ О РАВНОМЕРНОЙ АСИМПТОТИЧЕСКОЙ УСТОЙЧИВОСТИ РЕШЕНИЙ СИСТЕМЫ КОНЕЧНО-РАЗНОСТНЫХ УРАВНЕНИЙ

Персидский С. К., Журавлев В. В.

Рассмотрим систему конечно-разностных уравнений

$$x_s(m+1) = f_s(m, x_1(m), \dots, x_n(m)) \quad (s = \overline{1,n}), \tag{1}$$

заданную в области h: $m \in I = \{0, 1, 2, \dots, n, \dots\}$, $\|x\| \leqslant R$, где правые части – однозначные непрерывные функции, причем $f_s(m, 0) \equiv 0$. Будем также использовать запись системы (1) в векторной форме:

$$x(m+1) = f(m, x(m)), \tag{2}$$

где $x \in \mathbb{R}^n$.

В дальнейшем будем рассматривать функцию $V(m, x)$, непрерывную при любом фиксированном $m \in I$ и удовлетворяющую в области h неравенству $V(m, x) \geqslant u(\|x\|)$, где $u(\|x\|)$ — неубывающая положительно знакоопределенная функция, $u(0) = 0$, при этом будем писать, что $V(m, x) \in L$.

Определение 1. Пусть $V(m, x) \in L$ — функция Ляпунова, заданная в области h. Пусть $\eta > 0$ — такое достаточно малое число, что множество точек (m, x), в которых выполняется неравенство

$$V(m, x) \leqslant \eta,$$

является подмножеством множества h, что возможно в силу положительной знакоопределенности функции $V(m, x)$. Пусть $m = m^*$, рассмотрим множество точек, в которых $V(m^*, x) \leqslant h$. Если на нем при $m^* \to \infty$ $\|x\| \to 0$, то будем называть функцию $V(m, x)$ *положительной сильнознакоопределенной.*

Пусть, например, $V(m, x)$ является квадратичной формой вида

$$V(m, x) = \sum_{s,k=1}^{n} a_{sk}(m) x_s x_k \quad (a_{sk} = a_{ks}).$$

Или

$$V(m, x) = x^T A(m) x,$$

где $A(m)$ — матрица коэффициентов квадратичной формы.

Обозначим через $\lambda_н(m)$ и $\lambda_в(m)$ наименьшее и наибольшее собственные значения матрицы $A(m)$, тогда имеет место неравенство:

$$\lambda_н(m)\|x\|^2 \leqslant V(m,x) \leqslant \lambda_в(m)\|x\|^2.$$

Если $\lambda_н(m) \geqslant \alpha > 0$ и $\lambda_н(m) \to \infty$ при $m \to \infty$, то рассматриваемая квадратичная форма будет функцией положительной сильнознакоопределенной.

Определение 2. Пусть в области $g\colon m \in I$, $\|x\| \leqslant l \leqslant R$ определена функция $V(m,m_0,x_1,\ldots,x_n) \in L$, где $m_0 \geqslant 0$ — параметр. В дальнейшем будем предполагать, что при всяком $m_0 \geqslant 0$ и $m = m_0$

$$V(m,m_0,x_1,\ldots,x_n) = W(x_1,\ldots,x_n), \tag{3}$$

где функция W не зависит от m_0.

Пусть $r > 0$ $(r < l)$ — произвольно взятое число. Положим

$$\gamma(r) = \sup_{\|x\|\leqslant r} W(x_1,\ldots,x_n).$$

Если рассматриваемая функция $V(m,m_0,x_1,\ldots,x_n)$ такова, что при всяком сколь угодно малом $\alpha > 0$ $(\alpha \leqslant l)$ всегда найдется такое число $r = r(\alpha) > 0$ $(r \leqslant \alpha)$, что при любом $m_0 \geqslant 0$ и всех $m > m_0$ в точках $\|x\| = \alpha$ функция $V(m,m_0,x_1,\ldots,x_n)$ удовлетворяет неравенству

$$V(m,m_0,x_1,\ldots,x_n) > \gamma(r),$$

то будем говорить, что рассматриваемая функция $V(m,m_0,x_1,\ldots,x_n)$ является в области g положительной знакоопределенной, *удовлетворяющей условию* (A).

Определение 3. Пусть в области g при $m \geqslant m_0$ функция $V(m,m_0,x_1,\ldots,x_n) \in L$ удовлетворяет при всяком $m = m_0$ соотношению (3). Если при любых фиксированных значениях $m_0 \geqslant 0$ и $r > 0$ $(r < l)$ всегда найдется такое не зависящее от m_0 число $M = M(r) > 0$, что при всех значениях $\tau \geqslant M$ во всех точках $(\tau + m_0, m_0, \bar{x}_1,\ldots,\bar{x}_n) \in g$, координаты которой удовлетворяют условию

$$\|\bar{x}\| \geqslant \frac{r}{2},$$

выполняется неравенство

$$V(\tau + m_0, m_0, \bar{x}_1,\ldots,\bar{x}_n) > \gamma(r),$$

то будем говорить, что рассматриваемая функция $V(m,m_0,x_1,\ldots,x_n)$ является в области g положительной знакоопределенной, *удовлетворяющей условию* (B).

Имеет место следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть правые части системы* (1) *определены в области h и удовлетворяют в ней условию Липшица. Если в указанной области определена положительная сильнознакоопределенная функция $V(m,x) \in L$, первая конечная разность которой в силу системы* (1) $\Delta V_{m_{(1)}} \leqslant 0$, *то нулевое решение системы асимптотически устойчиво, равномерно по x^0.*

Доказательство. Выберем достаточно малое число $\eta > 0$ такое, что множество точек, в которых $V(m,x) \leqslant \eta$, является подмножеством множества h. Нетрудно видеть, что в рассматриваемом случае нулевое решение системы (1) устойчиво, поэтому по числу $R > 0$ $\exists \delta > 0$ ($\delta < R$): при $\|x(m_0)\| < \delta$ будет выполнено условие $\|x(m)\| < R$ $\forall m \geqslant m_0$.

Выберем число $0 < \delta_1 \leqslant \delta$: $V(m_0, x) \leqslant \eta$. Так как $\Delta V_{m_{(1)}} \leqslant 0$, то при всех $\bar{m} \geqslant m_0$ $V(\bar{m}, x) \leqslant \eta$. Это неравенство сохраняется на всех решениях $x = x(m)$ системы (1), где $\|x(m_0)\| < \delta_1$. Но на множестве $V(\bar{m}, x(\bar{m})) \leqslant \eta$ $\|x(m)\| \to 0$ при $m \to \infty$. Таким образом, из $\|x(m_0)\| < \delta_1$ следует, что $\|x(m)\| \to 0$ при $m \to \infty$ и теорема доказана. □

Рассмотрим обращение теоремы 1 в случае линейной системы. Пусть дана линейная система

$$x(m+1) = P(m)x(m), \tag{4}$$

где $x \in \mathbb{R}^n$, $P(m)$ — матрица коэффициентов системы размерности $n \times n$. Всюду в дальнейшем будем предполагать, что при любом $m \in I$ матрица $P(m)$ — невырожденная, и ее элементы принимают конечные значения. Тогда решения системы (4) определены на I как при возрастании аргумента m, так и при его убывании от $m_0 > 0$ ($m_0 \in I$) до значения $m = 0$.

Рассмотрим решение системы (4)

$$x_s = \varphi_s(m, m_0, x_1^0, \dots, x_n^0) \qquad (s = \overline{1,n}), \tag{5}$$

проходящее при $m = m_0$ через точку $(m_0, x_1^0, \dots, x_n^0) \in I \times \mathbb{R}^n$. Очевидно, что соотношения (5) однозначно разрешимы относительно x_s^0 по формулам

$$x_s^0 = \varphi_s(m_0, m, x_1, \dots, x_n) \qquad (s = \overline{1,n}). \tag{6}$$

При этом (6) образует полную систему независимых первых интегралов системы (4). Заметим, что правые части решений (5) линейной системы линейно зависят от начальных значений $x_1^0, \dots, x_n^0$, поэтому правые части в формулах (6) линейно зависят от $x_1, \dots, x_n$. Нетрудно видеть, что при этом функция

$$V(m, x_1, \dots, x_n) = \sum_{s=1}^{n} \varphi_s^2(0, m, x_1, \dots, x_n) \tag{7}$$

будет квадратичной формой. В случае устойчивости системы (4) функция (7) будет знакоопределенной, а в случае асимптотической устойчивости системы (4) равномерно по x_s^0 функция (7) будет положительной сильнознакоопределенной, причем $\Delta V_{m_{(4)}} \equiv 0$.

Действительно, положим

$$V(m, x_1, \dots, x_n) = \sum_{s=1}^{n} \varphi_s^2(0, m, x_1, \dots, x_n).$$

Функция $V(m,x) \geqslant 0$. Покажем, что в случае асимптотической устойчивости решения $x(m) \equiv 0$ системы (4) эта функция будет положительной сильнознакоопределенной. В силу системы (4) $\Delta V_{m_{(4)}} \equiv 0$. Пусть нулевое решение системы (4) устойчиво асимптотически равномерно по x^0. Сначала покажем, что $V(x,m) \in L$. Действительно, в рассматриваемом случае имеет место устойчивость нулевого решения системы (4), т. е. по числу $\varepsilon > 0$ возьмем максимально возможное $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ при $m_0 = 0$, $\exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0$ ($\delta < \varepsilon$): из условия $\|x(m_0)\| < \delta$ следует, что $\|x(m)\| < \varepsilon \ \forall m \geqslant m_0$. Очевидно, что такой выбор величины δ определяет неубывающую функцию $\delta(\varepsilon)$. Рассмотрим точку $M(m,x)$, где $m > 0$, $\|x\| = \varepsilon$. Пусть $x = x(m)$ — решение системы (4), проходящее через точку M. Тогда

$$V(M) = V(m, x(m)) = V(0, x^0) = \sum_{s=1}^{n} (x_s^0)^2 \geqslant \delta^2(\varepsilon) = \delta^2(\|x\|).$$

Таким образом, $V(m,x) \in L$.

С другой стороны, $V(m,x)$ — квадратичная форма. Множество всех решений системы (4), удовлетворяющих при $m = 0$ условию $\|x^0\|^2 = \delta^2$, в силу асимптотической устойчивости линейной системы, определяет функцию Ляпунова $V(m,x)$, сохраняющую на решениях системы постоянное значение, равное $\delta^2 > 0$. В силу асимптотической устойчивости, равномерной по x^0, $\|x(m)\| \to 0$ при $m \to \infty$, что возможно только в случае, когда наименьшее собственное значение рассматриваемой квадратичной формы $\lambda_n(m) \to \infty$ при $m \to \infty$. Таким образом построенная функция $V(m,x)$ является сильнознакоопределенной квадратичной формой.

Приведем формулировку теоремы, которая имеет вспомогательный характер.

Теорема 2. *Пусть система* (1) *такова, что в области* g *существует функция* $V(m, m_0, x_1, \dots, x)n) \in L$, *удовлетворяющая условию* (A), *первая конечная разность которой в силу системы* (1) $\Delta_{m_{(1)}} \leqslant 0$ *при* $m \geqslant m_0 \geqslant 0$.

Тогда первое решение системы (1) *устойчиво равномерно по* x^0.

Рассмотрим следующую теорему

Теорема 3. *Пусть система* (1) *такова, что в области* g *существует функция* $V(m, m_0, x_1, \dots, x)n) \in L$, *удовлетворяющая условиям* (A) *и* (B), *первая конечная разность которой в силу системы* (1) $\Delta V_{m_{(1)}} \leqslant 0$ *при* $m \geqslant m_0 \geqslant 0$.

Тогда первое решение системы (1) *асимптотически устойчиво, равномерно по* m_0, x^0.

Доказательство. В рассматриваемом случае нулевое решение системы (1) равномерно устойчиво в силу теоремы (2). Поэтому при любом $m_0 \geqslant 0$ всегда найдется не зависящее от m_0 такое число $r > 0$ $(r \leqslant l)$, что все решения

$$x_s = x_s(m, m_0, x_1^0, \dots, x_n^0) \qquad (s = \overline{1, n}) \tag{8}$$

системы (1), удовлетворяющие при $m \geqslant m_0 \geqslant 0$ начальным условиям

$$\|x^0\| \leqslant r,$$

будут при всех значениях $m \geqslant m_0$ оставаться в области g.

По условию теоремы при $m \geqslant m_0 \geqslant 0$ функция $\Delta V_{m_{(1)}} \leqslant 0$. Следовательно, при этих значениях m на (8) будет выполнено неравенство

$$V(m, m_0, x_1, \dots, x_n) \leqslant V(m_0, m_0, x_1, \dots, x_n) \leqslant \gamma(r), \tag{9}$$

где $\gamma(r) = \sup V(m_0, m_0, x_1, \dots, x_n)$ при $\|x\| \leqslant r$.

Функция $V(m_0, m_0, x_1, \dots, x_n)$ является, кроме того, положительной знакоопределенной, удовлетворяющей условию (B). Поэтому всегда найдется не зависящее от m_0 такое число $M_1 = M_1(r) > 0$, что при всех значениях $\tau_1 \geqslant M_1$ во всех точках $(\tau_1 + m_0, x_1, \dots, x_n) \in g$, координаты которых удовлетворяют условию

$$\|x\| \geqslant \frac{r}{2}, \tag{10}$$

будет выполнено условие

$$V(\tau_1 + m_0, x_1^0, \dots, x_n^0) > \gamma(r).$$

Отсюда на основании (9) и (10) можно заключить, что при всех значениях $\tau \geqslant M_1$ решения (8) удовлетворяют неравенству

$$\|x(\tau_1 + m_0, x_1^0, \dots, x_n^0)\| < \frac{r}{2}.$$

Рассмотрим решения системы (1), удовлетворяющие при $m = m_0 + M_1$ начальным условиям

$$\|x(\tau_1 + m_0, x_1^0, \dots, x_n^0)\| < \frac{r}{2}. \tag{11}$$

По аналогии можно сделать заключение о наличии такого не зависящего от m_0 числа $M_2 = M_2(\frac{r}{2}) > 0$, что при $\tau_2 > M_1 + M_2$ значения, удовлетворяющее начальным условиям (11), а тем самым и решения системы (8) будут таковы, что на них выполняется неравенство

$$\|x(\tau_2 + m_0, m_0, x_1^0, \dots, x_n^0)\| < \frac{r}{4}.$$

Продолжая этот процесс, можно сделать заключение о равномерной асимптотической устойчивости по m_0 и x_s^0 нулевого решения рассматриваемой системы. □

Заметим, что для линейных систем вида (4) с невырожденной матрицей теорема 3 допускает обращение, аналогичное обращению теоремы 1.

Теоремы вида 1 – 3 для систем дифференциальных уравнений ранее были рассмотрены в работах [1], [2].

Список литературы

1. Персидский С. К. *Ко второй методе Ляпунова.* — АН СССР, Прикладная математика и механика. — Т. 25, вып. 1, 1961 г. — С. 17–23.
2. Персидский С. К. *К вопросу о равномерной асимптотической устойчивости.* — Труды межвузовской конференции по прикладной теории устойчивости, движения и асимптотической механике. — Казань, 1963. — С. 110–113.