Ученые записки Таврического национального университета им. В. И. Вернадского

Серия "МАТЕМАТИКА" № 1 (2001) 81 – 86

УДК 539.3

РЕГУЛЯРНЫЕ БЕСКОНЕЧНЫЕ СИСТЕМЫ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ В СЛУЧАЕ ДЛИННОПЕРИОДИЧЕСКИХ ДЕФОРМАЦИЙ ПРИЗМЫ

Папков С. О., Чехов В. Н.

Построение точных решений краевых задач теории упругости об установившихся вынужденных колебаниях упругих тел конечных размеров при помощи метода суперпозиции рассматривается в ряде работ В.Т. Гринченко и В.В. Мелешко ([1] и др.). Данный метод базируется на сведении краевой задачи к бесконечной системе линейных алгебраических уравнений, приближенное решение которой, как правило, осуществляется при помощи метода редукции. В работе [1], для ряда задач выдвигаются гипотезы об асимптотическом поведении неизвестных в соответствующих бесконечных системах, использование которых позволяет значительно улучшить, по сравнению с методом редукции, качество решения краевой задачи (метод улучшенной редукции). Однако, существенным недостаткам данного метода является то, что при приближении частоты вынужденных колебаний к собственным частотам упругого тела происходит резкое увеличение погрешности в решении бесконечной системы, и соответственно в решении краевой задачи. Здесь, предлагается иной путь решения квазирегулярной бесконечной системы, соответствующей задаче об вынужденных установившихся кососимметрических колебаниях призмы, использующий идею Л. В. Канторовича [2] о сведении квазирегулярной бесконечной системы к совокупности регулярных бесконечных систем с одинаковой матрицей.

Постановка задачи и сведение ее к бесконечной системе линейных алгебраических уравнений

Состояние упругой среды, занимающей некоторую область K, задается тремя группами соотношений:

$$\Delta\vec{u} + \frac{1}{1-2\nu}\operatorname{grad}\operatorname{div}\vec{u} = \frac{\rho}{G}\frac{\partial^2\vec{u}}{\partial t^2}; \qquad (1)$$

$$\hat{\varepsilon} = \frac{1}{2}(\operatorname{grad}\vec{u} + (\operatorname{grad}\vec{u})^T); \hat{\sigma} = \frac{2G\nu}{1-2\nu}\operatorname{div}\vec{u}\cdot\hat{E} + 2G\hat{\varepsilon}.$$

Здесь, ν — коэффициент Пуассона, ϱ — плотность материала, G — модуль сдвига, $\hat{E}$ — единичный тензор второго ранга.

Рассмотрим вынужденные установившиеся колебания призмы (в декартовой системе координат $|x| \leq 1$, $|y| \leq \eta$, $z \in \mathbf{R}$) на примере решения следующей краевой задачи:

$$\begin{aligned} &\tfrac{1}{2G}\sigma_{xx}\big|_{x=\pm1} = \sin\tfrac{\pi y}{\eta}\cdot e^{-i\omega t};\ \tfrac{1}{2G}\tau_{xy}\big|_{x=\pm1} = 0;\\ &\tfrac{1}{2G}\sigma_{yy}\big|_{y=\pm\eta} = 0;\ \tfrac{1}{2G}\tau_{xy}\big|_{y=\pm\eta} = 0. \end{aligned} \tag{2}$$

Здесь, ω — частота гармонической нагрузки.

Следуя [1], выбираем общее решение уравнений Ламе (1), в виде

$$\vec{u} = \{u(x,y)\vec{i} + v(x,y)\vec{j}\}e^{-i\omega t}; \tag{3}$$

$$\begin{aligned} u(x,y) = &\sum_{n=1}^{\infty}(A_n \operatorname{sh} p_{1,n}x + B_n \operatorname{sh} p_{2,n}x)\sin\alpha_n y + \sum_{n=1}^{\infty}(C_n\tfrac{\beta_n}{q_{1,n}}\operatorname{sh} q_{1,n}y +\\ &+ D_n\tfrac{\beta_n}{q_{2,n}}\operatorname{sh} q_{2,n}y)\sin\beta_n x;\\ v(x,y) = &D_0\cos\Omega_1 y + \sum_{n=1}^{\infty}(A_n\tfrac{\alpha_n}{p_{1,n}}\operatorname{ch} p_{1,n}x + B_n\tfrac{\alpha_n}{p_{2,n}}\operatorname{ch} p_{2,n}x)\cos\alpha_n y -\\ &- \sum_{n=1}^{\infty}(C_n ch q_{1,n}y + D_n ch q_{2,n}y)\cos\beta_n x. \end{aligned}$$

Здесь, $\alpha_n = \frac{2n-1}{2\eta}\pi$, $\beta_n = \pi n$, $q_{l,n}^2 = \beta_n^2 - \Omega_l^2, p_{l,n}^2 = \alpha_n^2 - \Omega_l^2$, $(l = 1{,}2)$, $\Omega_1 = \frac{\omega}{c_1}, \Omega_2 = \frac{\omega}{c_2}$, $c_1 = \sqrt{\frac{2G(1-\nu)}{\rho(1-2\nu)}}$ — скорость безвихревой волны, $c_2 = \sqrt{\frac{G}{\rho}}$ — скорость сдвиговой волны.

Обобщенный закон Гука позволяет получить из (3) следующие выражения для компонент тензора напряжений:

$$\begin{aligned} \tfrac{1}{2G}\sigma_{xx} = &\sum_{n=1}^{\infty}(A_n\tfrac{\alpha_n^2+p_{2,n}^2}{2p_{1,n}}ch p_{1,n}x + B_n p_{2,n} ch p_{2,n}x)\sin\alpha_n y +\\ &+ \sum_{n=1}^{\infty}(C_n\tfrac{\beta_n^2+\frac{\nu\Omega_1^2}{1-2\nu}}{q_{1,n}}\operatorname{sh} q_{1,n}y + D_n q_{2,n}\operatorname{sh} q_{2,n}y)\cos\beta_n x - \tfrac{\nu\Omega_1}{1-2\nu}D_0\sin\Omega_1 y;\\ \tfrac{1}{2G}\sigma_{yy} = &-\sum_{n=1}^{\infty}(A_n\tfrac{\alpha_n^2+\frac{\nu\Omega_1^2}{1-2\nu}}{p_{1,n}}ch p_{1,n}x + B_n p_{2,n} ch p_{2,n}x)\sin\alpha_n y -\\ &- \sum_{n=1}^{\infty}(C_n\tfrac{\beta_n^2+q_{2,n}^2}{2q_{1,n}}\operatorname{sh} q_{1,n}y + D_n q_{2,n}\operatorname{sh} q_{2,n}y)\cos\beta_n x - \tfrac{(1-\nu)\Omega_1}{1-2\nu}D_0\sin\Omega_1 y;\\ \tfrac{1}{2G}\sigma_{xy} = &\sum_{n=1}^{\infty}(A_n\alpha_n\operatorname{sh} p_{1,n}x + B_n\tfrac{\alpha_n^2+p_{2,n}^2}{2\alpha_n}\operatorname{sh} p_{2,n}x)\cos\alpha_n y +\\ &+ \sum_{n=1}^{\infty}(C_n\beta_n ch q_{1,n}y + D_n\tfrac{\beta_n^2+q_{2,n}^2}{2\beta_n}ch q_{2,n}y)\sin\beta_n x. \end{aligned}$$

Подставляя данные выражения в граничные условия (2), и используя разложения гиперболических функций, входящих в эти выражения по системам функций $\{\sin\alpha_n y\}_{n=1}^{\infty}$ и $\{\cos\beta_n x\}_{n=1}^{\infty}$, получаем бесконечную систему линейных алгебраических уравнений, для определения последовательностей $\{B_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{D_n\}_{n=0}^{\infty}$:

$$x_n = \frac{\Omega_1^2}{(1-2\nu)\Delta_n}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{y_k}{\beta_k^2+p_{1,n}^2}\left(\frac{2\alpha_n^2}{\beta_k^2+p_{2,n}^2}-\frac{\nu\Omega_2^2}{\beta_k^2}\right)+\frac{2\nu\Omega_1\cos\Omega_1\eta}{(1-2\nu)\Delta_n\eta}D_0+F_n;$$
$$y_n = \frac{\Omega_1^2}{(1-2\nu)\Delta_n^1}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{x_k}{\alpha_k^2+q_{1,n}^2}\left(\frac{2\beta_n^2}{\alpha_k^2+q_{2,n}^2}-\frac{\nu\Omega_2^2}{\alpha_k^2}\right);\quad (n=1,2,3,\dots) \tag{4}$$
$$D_0 = -\frac{\nu\Omega_1\Omega_2^2}{2(1-\nu)\sin\Omega_1\eta}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{x_k}{\alpha_k^2 p_{1,k}^2}.$$

Здесь, $x_n = B_n(-1)^{n+1}\operatorname{sh}p_{2,n}$; $y_n = D_n\frac{(-1)^n}{\eta}chq_{2,n}\eta$;

$$\Delta_n = p_{2,n}cthp_{2,n} - \frac{(\alpha_n^2+p_{2,n}^2)^2}{4\alpha_n^2 p_{1,n}}cthp_{1,n};\qquad \Delta_n^1 = \eta\left(q_{2,n}thq_{2,n}\eta - \frac{(\beta_n^2+q_{2,n}^2)^2}{4\beta_n^2 q_{1,n}}thq_{1,n}\eta\right);$$

$$F_n = -\frac{2\pi}{\eta^2\Delta_n(\alpha_n^2-(\pi/\eta)^2)};\ A_n = -B_n\frac{\alpha_n^2+p_{2,n}^2}{2\alpha_n^2}\cdot\frac{\operatorname{sh}p_{2,n}}{\operatorname{sh}p_{1,n}};\ C_n = -D_n\frac{\beta_n^2+q_{2,n}^2}{2\beta_n^2}\cdot\frac{chq_{2,n}\eta}{chq_{1,n}\eta}.$$

Исследование бесконечной системы в диапазоне низких частот колебаний

Область низких частот изгибных колебаний прямоугольной призмы определяется [1] как интервал $0 < \Omega < 1$ ($\Omega = \frac{2\omega}{\pi c_2}$), которому соответствует только одна распространяющаяся мода. Заметим, что в низком диапазоне частот при $\eta \le 1$ коэффициенты бесконечной системы (4) оказываются положительными. Оценим регулярность системы (4):

$$\frac{\Omega_1^2}{\Delta_n(1-2\nu)}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\beta_k^2+p_{1,n}^2}\left(\frac{2\alpha_n^2}{\beta_k^2+p_{2,n}^2}-\frac{\nu\Omega_2^2}{\beta_k^2}\right) = 1-\varphi_n;$$

$$\frac{\Omega_1^2}{\Delta_n^1(1-2\nu)}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\alpha_k^2+q_{1,n}^2}\left(\frac{2\beta_n^2}{\alpha_k^2+q_{2,n}^2}-\frac{\nu\Omega_2^2}{\alpha_k^2}\right) = 1-\psi_n;$$

$$\varphi_n \sim [2+\frac{\nu\Omega_2^2}{3}]\frac{1}{\alpha_n}+O(\frac{1}{\alpha_n^2}), n\to\infty; \tag{5}$$
$$\psi_n \sim \frac{\eta\nu\Omega_2^2}{\beta_n}+O(\frac{1}{\beta_n^2}), n\to\infty.$$

Непосредственные вычисления по формулам (5) показывают, что система (4) является квазирегулярной. Так при $\eta = 1$, для $\nu = 0,33$ (медь) оказывается, что $\varphi_n > 0 (n = 1,2,3,\dots)$,, $\psi_1 < 0, \psi_2 < 0, \psi_n > 0 \quad (n = 3,4,\dots)$.

Сведем квазирегулярную систему (4) $(\eta = 1, \nu = 0,33)$ к совокупности четырех парных регулярных бесконечных систем при помощи замены переменных:

$$x_n = -\chi_{n-2}^{*} + \chi_{n-2}^{0}D_0 + \chi_{n-2}^{1}x_1 + \chi_{n-2}^{2}x_2,\quad (n=3,4,\dots);$$

$$y_n = -Y_n^{*} + Y_n^{0}D_0 + Y_n^{1}x_1 + Y_n^{2}x_2,\quad (n=1,2,3,\dots). \tag{6}$$

Заметим, что для других значений параметров η и ν замена переменных может осуществляться по другим формулам, так как данная замена обуславливается поведением последовательностей $\{\varphi_n\}$ и $\{\psi_n\}$.

Подставляя (6) в (4) получаем:

$$\begin{aligned} X_n^{\phi} &= \frac{\Omega_1^2}{(1-2\nu)\Delta_{n+2}} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{Y_k^{\phi}}{\beta_k^2+p_{1,n+2}^2} \left(\frac{2\alpha_{n+2}^2}{\beta_k^2+p_{2,n+2}^2} - \frac{\nu\Omega_2^2}{\beta_k^2} \right) + f_n^{\phi} \\ Y_n^{\phi} &= \frac{\Omega_1^2}{(1-2\nu)\Delta_n^1} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{X_k^{\phi}}{\alpha_{k+2}^2+q_{1,n}^2} \left(\frac{2\beta_n^2}{\alpha_{k+2}^2+q_{2,n}^2} - \frac{\nu\Omega_2^2}{\alpha_{k+2}^2} \right) + g_n^{\phi} \end{aligned} \qquad (7)$$

$(n = 1, 2, 3, :; \phi \in \{*, 0, 1, 2\})$.

Здесь, $f_n^* = -F_{n+2}$, $g_n^* = 0$, $f_n^0 = \frac{2\nu\Omega_1^2 \cos\Omega_1\eta}{(1-2\nu)\eta\Delta_{n+2}p_{1,n+2}^2}$, $g_n^0 = 0$,

$f_n^l = 0, g_n^l = \frac{\Omega_1^2}{(1-2\nu)\Delta_n^1} \cdot \frac{1}{\alpha_l^2+q_{1,n}^2} \left(\frac{2\beta_n^2}{\alpha_l^2+q_{2,n}^2} - \frac{\nu\Omega_2^2}{\alpha_l^2} \right)$, ($l = 1,2$).

Бесконечные системы (7) являются регулярными бесконечными системами (но не вполне регулярными) в силу замены (6). Используя теорему о существовании главного решения и теорему, предложенную П. С. Бондаренко [2], можно показать существование единственного ограниченного решения для каждой из систем (7). Для исследования асимптотических свойств решений систем (7) предлагается следующая теорема:

Теорема. Для существования общего ненулевого предела у единственного ограниченного решения парной регулярной бесконечной системы

$$x_k = \sum_{n=1}^{\infty} a_{k,n} y_n + b_k; \; y_k = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_{k,n} x_n + \beta_k, \qquad (k = 1, 2, 3, \dots)$$

с неотрицательными коэффициентами и свободными членами достаточно выполнения следующих двух условий:

a) $\exists L, l > 0 \; : \quad \forall k, n \in \mathrm{N} \quad (n < k) \quad l r_n \le a_{k,n} q_k \le L r_n; l\rho_n \; \alpha_{k,n}\xi_k L\rho_n$.

Здесь положительные последовательности q_k, ξ_k, r_n, ρ_n таковы, что

$$q_k b_k \le P, q_k\varphi_k \le P, \xi_k\beta_k \le P, \xi_k\psi_k \le P;$$

$$\lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} r_n = \infty, \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} \rho_n = \infty, \quad r_{N+1} = o\left(\sum_{n=1}^{N} r_n \right), \quad N \to \infty.$$

$(\varphi_k = 1 - \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_{k,n}; \psi_k = 1 - \sum\limits_{n=1}^{\infty} \alpha_{k,n}; P > 0)$;

b) $\frac{\sum_{n=1}^{k-1} \rho_n}{\sum_{n=1}^{k-1} r_n} = O\left(\frac{\inf_{n \ge k} \xi_n}{q_k} \right), k \to \infty$.

Здесь, в отличии от подобных утверждений из [3, 4], появились последовательности r_n, ρ_n, и ослаблено условие (b).

Замечание. Если $r_n \sim n^{\lambda}, \rho_n \sim n^{\lambda}(n \to \infty); q_k \sim k^{\mu}, \xi_k \sim k^{\mu}(k \to \infty)$, то условие (b) теоремы выполняется заведомо.

Проверим системы (7) на достаточный признак существования ненулевого предела у решения. Положим $q_n = \alpha_{n+2}$, $\xi_n = \beta_n$. $r_k = 1$, $\rho_k = 1$ тогда в условии (а) теоремы получаем при $\Omega \in [0,1; 0,9]$:

$$L = \frac{2\Omega_1^2}{1-2\nu} \max\left\{ \left(1 + \Omega_2^2/p_{2,1}^2\right)^2 / 0,009, \left(1 + \Omega_2^2/q_{2,1}^2\right)^2 / 0,008 \right\};$$

$$l = \frac{2,68\Omega_1^2}{(1-2\nu)} \min\left\{ \frac{2\pi^2 - \nu\Omega_2^2(1 + \left({}^{6\eta}\!/_5\right)^2)}{\pi^2\left(1 + \left({}^{6\eta}\!/_5\right)^2\right)^2}, \frac{\eta^2}{(\eta^2+1)}\left(\frac{2\eta^2}{\eta^2+1} - \frac{4\eta^2\nu\Omega_2^2}{25\pi^2}\right) \right\}$$

По замечанию из сформулированной выше теоремы здесь второе условие теоремы оказывается излишним. Значит, существуют положительные пределы

$$\lim_{n\to\infty} \chi_n^\phi = \lim_{n\to\infty} Y_n^\phi = a_\phi, (\phi \in \{*, 0, 1, 2\}),$$

и к решению систем (7) может быть применен алгоритм лимитант [3]. Метод лимитант позволяет оценить решения данных бесконечных систем для верхних значений частоты из рассматриваемого диапазона (Ω близко к 1) даже с большей точностью, чем для нижних значений частоты (Ω близко к 0). В то время как при решении системы (4) методом улучшенной редукции здесь точность решения заметно падает [1].

Последовательности $\{\chi_n^\phi\}_{n=1}^\infty$, $\{Y_n^\phi\}_{n=1}^\infty$ ($\phi \in \{*, 0, 1, 2\}$) позволяют определить из системы (4) неизвестные D_0, x_1, x_2 . Действительно, приводя подобные в первой строке (4) при n = 1,2 и в третьей строке (4) получаем систему трех линейных алгебраических уравнений.

Зная решения систем (7), и D_0, x_1, x_2 можно получить решение системы (4) по формулам (6). При этом оказывается, что решение системы (4) имеет общий ненулевой предел

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} y_n = -a_* + D_0 a_0 + x_1 a_1 + x_2 a_2 = A. \tag{8}$$

Исследование напряжений в области низких частот

Внутри области, занимаемой упругим телом, ряды, представляющие напряжения, сходятся экспоненциально, но на границе, каждый из рядов, представляющих нормальные напряжения, сходится как ряд Фурье с общим членом порядка $O(1/n)$ и имеет в угловой точке особенность. Здесь, аналогично [1], при помощи асимптотического закона (8) улучшается сходимость данных рядов и устраняются особенности в угловых точках.

Максимальная погрешность в выполнении краевых условий наблюдается в угловых точках, составляя 0,2 % от максимума внешней нагрузки для $\Omega = 0,1$ и 0,1 % от максимума внешней нагрузки для частоты $\Omega = 0,9$. Таким образом, метод решения квазирегулярной бесконечной системы (4), примененный здесь, является более устойчивым к погрешности при подходе к первой собственной частоте, чем метод улучшенной редукции.

Картина распределения напряжений в призме, при значениях частоты Ω близких к нижней границе рассматриваемого диапазона частот, незначительно отличается от случая статической деформации. При приближении частоты Ω к верхней границе рассматриваемого интервала (к первой собственной частоте), напряжения σ_{yy} и σ_{xy} меняются незначительно, в то время как в распределении нормальных напряжений σ_{xx} происходят значительные изменения — максимум напряжений приходится теперь на середины ненагруженных сторон прямоугольника, при этом σ_{xx}^{max} оказываются выше максимума внешней нагрузки, в частности, для квадратного поперечного сечения при $\Omega = 0,9$ на 57 %.

Список литературы

1. Гринченко В. Т., Мелешко В. В. Гармонические колебания и волны в упругих телах. — К.: Наук. думка, 1981. — 284 с.
2. Канторович Л. В., Крылов В. И. Приближенные методы высшего анализа. — М.-Л.: Гос. изд-во технико-теоретической литературы, 1952. — 4-е изд. — 695 с.
3. Коялович Б. М. К теории бесконечных систем линейных уравнений // Труды Физ.- мат. ин.- та им. В. А. Стеклова — 1932. — 2, №4 — С.1 - 16.
4. Гринченко В. Т. Равновесие и установившиеся колебания упругих тел конечных размеров. — К.: Наук. думка, 1978. — 264 с.