Ученые записки Таврического национального университета им. В. И. Вернадского

Серия "МАТЕМАТИКА" № 1 (2001) 75–80

УДК 517.98

СХОДИМОСТЬ ПОЧТИ ВСЮДУ КАК СХОДИМОСТЬ В НЕЛИНЕЙНОЙ ИНДУКТИВНОЙ ШКАЛЕ ЛОКАЛЬНО ВЫПУКЛЫХ ПРОСТРАНСТВ

Орлов И. В.

Введение. Пространство измеримых функций со сходимостью по мере, введенное еще в 1919 г. [1], является классическим объектом функционального анализа ([2], гл.IV). Однако столь же широко используемая сходимость почти всюду не имеет подобного описания. Причина этого выясняется в первом пункте работы, где показано, что (в невырожденном случае) сходимость почти всюду не является топологической. Задача функционального описания данной сходимости решается в пункте втором построением подходящей шкалы локально выпуклых пространств. В пункте третьем рассмотрены некоторые специальные свойства шкалы. В пункте четвертом доказано, что пространство сходимости по мере есть топологический индуктивный предел построенной шкалы.

Нетопологический характер сходимости почти всюду

Пусть (S,μ) – пространство с конечной σ-аддитивной положительной мерой μ, $\mathcal{M}(S,\mu)$ – пространство вещественных μ-измеримых функций на S, $N(S,\mu)$ – подпространство функций, почти всюду равных нулю на S; фактор-пространство $\mathcal{M}(S,\mu)/N(S,\mu) = M(S,\mu)$ – основной объект нашего исследования.

Предложение 1. Если мера μ не чисто атомарная, то в топологии поточечной сходимости $N(S,\mu)$ не замкнуто в $\mathcal{M}(S,\mu)$. В частности, если μ не имеет атомов, то $N(S,\mu)$ плотно в $\mathcal{M}(S,\mu)$.

Доказательство. Пусть A – множество (конечное или счетное) атомов μ. Т.к. $\mu(S\backslash A) > 0$, то характеристическая функция $f_0 = \chi_{S\backslash A} \notin N(S,\mu)$. Если $U_{x,\varepsilon} = \{f \in \mathcal{M}(S,\mu) \mid |f(x)| < \varepsilon\}$, то $0 \in U_{x,\varepsilon} + f_0$ при $x \in A$ и $f^x = \chi_{\{x\}} \in U_{x,\varepsilon} + f_0$ при $x \in S\backslash A$. Следовательно, $f_0 \in \overline{N(S,\mu)}$, т.е. $N(S,\mu)$ не замкнуто. Если μ непрерывна, то $g_x = f \cdot \chi_{\{x\}} \in N(S,\mu)$ для каждой $f \in \mathcal{M}(S,\mu)$. □

Следствие. *Если μ не чисто атомарная, то фактор-топология в $M(S,\mu)$, порожденная топологией поточечной сходимости, не хаусдорфова. В частности, если μ непрерывна, то такая топология тривиальна.*

Предложение 2. Если μ не атомарная борелевская конечная регулярная мера на локально компактном пространстве S, то в $M(S,\mu)$ не существует отделимой линейной топологии, согласованной с секвенциальной сходимостью μ-почти всюду.

Доказательство. Допустим противное: такая топология $\tau(\mathrm{mod}\mu)$ существует. Пусть $\tau(\mu)$ – топология сходимости по мере в $M(S,\mu)$. Если F замкнуто в $\tau(\mathrm{mod}\,\mu)$ и f_0 – точка прикосновения F в $\tau(\mu)$, то в $M(S,\mu)$ найдется последовательность $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$, сходящаяся по мере к f_0. Выделив по теореме Рисса ([2], гл.III) подпоследовательность $f_{n_k} \to f_0$ $(\mathrm{mod}\ \mu)$, получаем $f_0 \in F$, т.е. F замкнуто в $\tau(\mu)$.

Таким образом, вложение $(M(S,\mu),\tau(\mu)) \hookrightarrow (M(S,\mu),\tau(\mathrm{mod}\mu))$ непрерывно. Но тогда из сходимости по мере должна следовать сходимость почти всюду, и нам остается построить контрпример.

Пусть A – множество (конечное или счетное) атомов меры μ. Обобщая известную конструкцию, выберем в $S\backslash A$ компакт K локально положительной меры (что, очевидно, возможно, ввиду локальной компактности S и $\mu(S\backslash A) > 0$). Пусть $U_k(x)$ – такие окрестности точек $x \in K$, что $0 < \mu(U_n(x)) < \dfrac{1}{n}$. При каждом $n = 1,2,\ldots$ выберем из покрытия $\{U_k(x)\}_{x\in K}$ конечное подпокрытие $\{U_n(x_{ni})\}_{i=1}^{k_n}$ и положим $f_{ni} = \chi_{U_n(x_{ni})}$; $i = 1,2,\ldots,k_n$.

Легко видеть, что для μ-почти всех $x \in K$ найдется (зависящее от x) бесконечное число таких пар индексов (n_1,i_1) и (n_2,i_2), что $f_{n_1 i_1}(x) = 1$, $f_{n_2 i_2}(x) = 0$. Следовательно, после произвольной перенумерации $f_{ni} = \tilde{f}_{k(n,i)}$, последовательность $\{\tilde{f}_k\}_{k=1}^{\infty}$ сходится к нулю по мере μ, но поточечно расходится μ-почти всюду. □

Замечание. Отсутствие секвенциальной (см.[8]) локально выпуклой отделимой топологии, согласованной с секвенциальной сходимостью μ-почти всюду, для не имеющей атомов меры μ легко установить, не прибегая к допущениям предложения 2.

Действительно, непрерывность вложения $(M(S,\mu),\tau(\mu)) \hookrightarrow (M(S,\mu),$ $\tau(\mathrm{mod}\ \mu))$ установлена выше в общей ситуации. Аналогично, из теоремы Лебега ([2], гл.III) следует, что всякое множество, замкнутое в $\tau(\mu)$, секвенциально замкнуто в $\tau(\mathrm{mod}\mu)$, и следовательно, пространства $(M(S,\mu),\tau(\mu))$ и $(M(S,\mu),\tau(\mathrm{mod}\mu))$ должны быть изоморфны. Но в силу теоремы Никодима [9], при отсутствии атомов у меры μ, на $(M(S,\mu),\tau(\mu))$ нет ненулевых линейных непрерывных функционалов, а значит ([10], гл.II), топология $\tau(\mu)$ не локально выпукла.

Построение индуктивной шкалы сходимости почти всюду

Из классических теорем Егорова ([2], гл.III) и Лузина ([4], гл.IV) легко следует метрическая лемма.

Лемма 1. *Пусть S – локально компактное пространство с конечной мерой μ, $f_n \in \mathcal{M}(S,\mu)$, $n = 1,2,\ldots$. Если $f_n \to f \pmod{\mu}$, то найдется такая возрастающая последовательность компактов $\{K_m\}_{m=1}^{\infty}$ в S, что $\mu(S\setminus \bigcup\limits_{m=1}^{\infty} K_m) = 0$, сужения $f_n|_{K_m}$ непрерывны ($m, n = 1,2,\ldots$) и $f_n|_{K_m} \to f|_{K_m}$ ($n \to \infty, m = 1,2,\ldots$) равномерно.*

Всюду далее S и μ удовлетворяют условиям леммы 1.

Используем результат леммы 1 для построения требуемой шкалы. Пусть $T = \{t\}$ – множество классов эквивалентности (по отношению взаимного вложения) возрастающих последовательностей компактов, заполняющих почти все S. Нетрудно проверить, что порядок в T, противоположный вложению, – индуктивный. Назовем элементы $t \in T$ *базами непрерывности* в (S,μ).

Определение 1. Назовем $t \in T$ *базой непрерывности* $f \in \mathcal{M}(S,\mu)$, $t = t(f)$, если сужения $f|_{K_m}$ непрерывны ($m = 1,2,\ldots$) для $\{K_m\}_{m=1}^{\infty} \in t$. Положим $\mathcal{M}_t(S,\mu) = \{f \in \mathcal{M}(S,\mu) \,|\, t(f) = t\}$, $N_t(S,\mu) = N(S,\mu) \cap \mathcal{M}_t(S,\mu)$ и

$$M_t(S,\mu) = \mathcal{M}_t(S,\mu)/N_t(S,\mu).$$

Из леммы 1 следует

$$M(S,\mu) = \bigcup_{t\in T} M_t(S,\mu). \qquad (*)$$

Лемма 2. *Пусть $\{K_m\} \in t \in T$. Семейство преднорм $\{\|f_m\| = \|f|_{K_m}\|_{C(K_m)}\}$ порождает в $M_t(S,\mu)$ полную отделимую локально выпуклую топологию τ_t. При этом $f_n \to f \pmod{\mu} \Leftrightarrow f_n \to f$ в некотором $(M_t(S,\mu),\tau_t)$.*

Доказательство. Проверим замкнутость $N_t(S,\mu)$ в $\mathcal{M}_t(S,\mu)$. Если K_m – компакты локально положительной меры в S, $f(x_0) \neq 0$ при $x_0 \in K_m$, то $f \notin N(S,\mu)$, т.е.

$$(f \in N_t(S,\mu)) \Rightarrow (\|f\|_m = 0,\ m = 1,2,\ldots).$$

Обратно, если $\|f\|_m = 0$ ($m = 1,2,\ldots$), то $f(x) = 0$ для $x \in \bigcup\limits_{m=1}^{\infty} K_m$, откуда $f \in N_t(S,\mu)$. Таким образом, $M_t(S,\mu)$ – отделимое счетно-нормированное пространство с определяющим семейством преднорм $\|\hat f\| = \inf\limits_{f\in\hat f} \|f\|_m$ ($m = 1,2,\ldots$).

Последнее утверждение леммы непосредственно следует из леммы 1. □

Следующая лемма вытекает из определения 1 баз непрерывности $t \in T$ и индуктивного порядка в T.

Лемма 3. *Система $\{M_t(S,\mu)\}_{t\in T}$ является индуктивной шкалой по непрерывному вложению относительно порядка в T, т.е.*

$$(t_1 \preccurlyeq t_2) \Rightarrow (M_{t_1} \subsetneq M_{t_2}).$$

Определение 2. Обозначим $M(S, \mathrm{mod}\,\mu)$ разложение (*); при этом сходимость в шкале $M(S, \mathrm{mod}\,\mu)$ понимается как сходимость хотя бы в одном из пространств шкалы. Назовем $M(S, \mathrm{mod}\,\mu)$ *шкалой сходимости почти всюду.*

Из приведенных выше лемм следует

Теорема 3. *Сходимость в шкале $M(S, \mathrm{mod}\,\mu)$ совпадает с секвенциальной сходимостью μ-почти всюду.*

Почленное дифференцирование в шкале сходимости почти всюду

Выделим одно специальное свойство индуктивных шкал пространств.

Определение 3. Индуктивно упорядоченная по непрерывному вложению шкала топологических пространств $\{E_i\}_{i\in I}$ называется *σ-индуктивной*, если любое счетное подмножество в I имеет верхнюю грань, т.е. для $i_1, i_2, \ldots \in I$ найдется такой индекс $i^0 \in I$, что

$$E_{i_n} \underset{\to}{\subseteq} E_{i^0} \quad (n = 1, 2, \ldots).$$

Теорема 4. *Шкала $M(S, \mathrm{mod}\,\mu)$ – σ-индуктивная.*

Доказательство. Пусть $\{M_{t_n}(S, \mu)\}_{n=1}^{\infty}$ – любая последовательность пространств из шкалы $M(S, \mathrm{mod}\,\mu)$, $\{K_{nm}\}_{m=1}^{\infty} \in t_n$, $\varepsilon > 0$. Выберем номера m_n^k, чтобы $\mu(S \backslash K_{n,m_n^k}) < \varepsilon/2^{n+k}$ $(k = 1, 2, \ldots)$, $\{m_n^k\}_{k=1}^{\infty} \uparrow$.

Тогда $\mu(S \backslash \bigcap\limits_{m=1}^{\infty} K_{n,m_n^k}) < \varepsilon/2^{n+k}$. Положим $K_k^0 = \bigcap\limits_{m=1}^{\infty} K_{n,m_n^k}$; тогда

$$\{K_k^0\}_{k=1}^{\infty} \qquad \text{и} \qquad \mu(S \backslash \bigcup_{m=1}^{\infty} K_k^0) = 0.$$

Пусть $\{K_k^0\}_{k=1}^{\infty} \in t^0 \in T$, $f \in M_{t_n}(S, \mu)$. По построению $K_k^0 \subset K_{n,m_n^k}$, откуда все сужения $f|_{K_k^0}$ непрерывны, т.е. $f \in M_{t^0}(S, \mu)$. Следовательно,

$$M_{t_n} \underset{\to}{\subseteq} M_{t^0}(S, \mu) \qquad (n = 1, 2, \ldots).$$

□

В работах [5], [6] автором получены достаточные условия почленного дифференцирования для отображений в шкалы локально выпуклых пространств. При этом, в частности, для σ-индуктивных шкал сохраняются классические достаточные условия (см. также [7], §5). Теорема 4 позволяет применить эти условия к шкале $M(S, \mathrm{mod}\,\mu)$.

Теорема 5. *Пусть $\{f_n(x, \lambda)\}_{n=1}^{\infty}$ – последовательность μ-измеримых по x функций на S с параметром $\lambda \in [a, b]$. Предположим, что:*

1) $f_n(x, \lambda)$ дифференцируемы по λ для μ-п.в. $x \in S$ непрерывно по $\lambda \in [a, b]$;

2) ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x, \lambda_0)$ сходится для μ-п.в. $x \in S$ при некотором $\lambda_0 \in [a, b]$;

3) ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\partial f_n}{\partial\lambda}(x,\lambda)$ *сходится для* μ*-п.в.* $x \in S$ *равномерно по* $\lambda \in [a,b]$.

Тогда ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x,\lambda)$ *сходится для* μ*-п.в.* $x \in S$ *равномерно по* $\lambda \in [a,b]$, *его сумма дифференцируема по* λ *для* μ*-п.в.* $x \in S$ *непрерывно по* λ *и*

$$\frac{\partial}{\partial\lambda}\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x,\lambda) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\partial f_n}{\partial\lambda}(x,\lambda) \quad \text{для } \mu\text{-п.в. } x \in S.$$

Связь шкалы сходимости почти всюду и пространства сходимости по мере

Здесь, следуя традиции, мы сохраняем обозначение $M(S,\mu)$ для пространства сходимости по мере.

Теорема 6. *Если* S *– локально компактное пространство с конечной мерой* μ, *то* $M(S,\mu)$ *есть топологический индуктивный предел шкалы* $M(S, \operatorname{mod}\mu)$:

$$M(S,\mu) = \tau - \varinjlim_{t\in T} M_t(S,\mu).$$

Доказательство. Так как сходимость в $M(S,\operatorname{mod}\mu)$ – секвенциальная [8], а $M(S,\mu)$ метризуемо, то достаточно рассмотреть сходящиеся последовательности. Если $\hat{f}_n \to \hat{f}$ в некотором $M_t(S,\mu)$, то по лемме 2 $\hat{f}_n \to \hat{f}$ $(\operatorname{mod}\mu)$, откуда по теореме Лебега ([2], гл.III) $\hat{f}_n \to \hat{f}$ по мере. Следовательно, вложения $M_t(S,\mu) \subseteq M(S,\mu)$ непрерывны.

Далее, если F замкнуто относительно сходимости в шкале $M(S,\operatorname{mod}\mu)$, $\hat{f}_n \in F$ $(n = 1,2,\dots)$ и $\hat{f}_n \to \hat{f}$ по мере, то по теореме Рисса ([2], гл.III) выберем подпоследовательность $\hat{f}_{n_k} \to \hat{f}$ $(\operatorname{mod}\mu)$, откуда по теореме 3 $\hat{f} \in F$. Следовательно, F замкнуто также в $M(S,\mu)$. Отсюда топология сходимости по мере – это сильнейшая линейная топология, сохраняющая непрерывность рассмотренных вложений. □

Следствие (аппроксимационная теорема). *Если, в условиях теоремы 6, мера* μ *непрерывна, то при любом выборе окрестностей нуля* $U_t \subset M_t(S,\mu)$:

$$\operatorname{conv}\left(\bigcup_{t\in T} U_t\right) = M(S,\mu).$$

Доказательство. В этом случае, по теореме Никодима [9], сопряженное к $M(S,\mu)$ пространство тривиально: $M(S,\mu)^* = \{0\}$, откуда ([10], гл.II) в $M(S,\mu)$ нет собственных выпуклых открытых подмножеств. Остается применить теорему 6. □

Список литературы

1. Fréchet M. *Sur divers modes de convergence d'une suite de fonctions d'une variable* // Bull. Calcutta Math. Soc. — 1919-1920 — v.11 — p.187–206.

2. Данфорд Н., Шварц Дж. *Линейные операторы.* Обшая теория. — Москва: ИЛ, 1962. — 896с.
3. Orlov I.V. *The space of measurable functions with almost everywhere convergence is a nonlinear scale of the locally convex spaces* // Spectral and evolutionary problems. Proceedings of the Eighth Crimean Autumn Mathematical School-Symposium — 1998. — № 8. — C.45–51.
4. Эдвардс Р. *Функциональный анализ.* Теория и приложения. — Москва: Мир, 1969. — 1072с.
5. Orlov I.V. *A termwise differentiation in linear and nonlinear scales of locally convex spaces. I. The case of scalar argument* // Spectral and evolutionary problems. Proceedings of the Fifth Crimean Autumn Mathematical School-Symposium — 1996. — № 5. — C.116–124.
6. Orlov I.V.*A termwise differentiation in linear and nonlinear scales of locally convex spaces.* II. General case // Spectral and evolutionary problems. Proceedings of the Sixth Crimean Autumn Mathematical School-Symposium — 1996. — № 6. — C.303–314.
7. Orlov I.V. *A termwise differentiation in the inductive scales of the locally convex spaces* // Operator Theory & Relative Topics: Proceedings of the Krein conference. Odessa. 1997 — Operator Theory Advances & Appl. — v.118 — Basel-Boston-Berlin-Birkhäuser. — 2000 — P.321 333.
8. Энгелькинг Р. *Общая топология.* — Москва: Мир, 1986. — 752с.
9. Nikodym O.M. *Contribution à la théorie des fonctionelles linéaires en connexion avec la théorie de la mesure des ensembles abstraits* // Mathematica. Cluj — 1931. — v.5. — P.130–141.
10. Шефер Х. *Топологические векторные пространства.* — Москва: Мир, 1971. — 360с.