Ученые записки Таврического национального университета им. В. И. Вернадского

Серия "МАТЕМАТИКА" № 1 (2001) 71–74

УДК 517.430

ОБОБЩЕНИЕ ФОРМУЛЫ СЛЕДОВ НА СЛУЧАЙ $K_+^R(M)$-ОПЕРАТОРОВ

Москалева Ю. П.

В теории самосопряженных операторов формула следов впервые была выведена И.М. Лившицем [1]. В последствии М.Г. Крейн [2, 3] показал справедливость формулы при более общих условиях. Возможности переноса формулы для несамосопряженных операторов изучались в работе Г. Лангера [4]. Формула следов, когда сравниваются $R(A)$ и $R(A^*)$ была получена Л.А. Сахновичем в работе [5] для несамосопряженных ограниченных операторов с ядерной мнимой компонентой и абсолютно непрерывным спектром. Последняя формула переносится на случай $K_+^r(M)$ операторов, что и является основным результатом настоящей работы.

Определение 1. Будем говорить,что квазиэрмитовый оператор A является K_+^r – оператором (или принадлежит классу K_+^r) если A — диссипативный K_r – оператор (см.[6]) характеристическая матрица-функция которого $\chi_A(\lambda)$ представима в виде

$$\chi_A(\lambda) = \overset{b}{\underset{a}{\int\limits^{\frown}}} \exp\left[-i\frac{\mathfrak{S}^*(t)\mathfrak{S}(t)}{t-\lambda}\,dt\right], \ (-\infty \leqslant a \leqslant b \leqslant +\infty)$$

где $\int\limits_a^b \|\mathfrak{S}^*(x)\mathfrak{S}(x)\|\,dx < \infty$. (под нормой матрицы мы понимаем норму соответствующего преобразования в пространстве векторов ℓ_2^r)

При этом характеристической матрицей–функцией называется $\chi_A(\lambda)$, определяемая равенством

$$\chi_A^*(\alpha)J^{-1}\chi_A(\lambda) = J^{-1} + i(\overline{\alpha} - \lambda)\|((A - \alpha I)(A - \lambda I)^{-1}g_k, g_m)\|$$

где $\alpha \in \rho(A)$,

Согласно [6] всякий оператор A класса K_+^r унитарно эквивалентен модельному оператору

$$(Af)(x) = xf(x) + i\int^b f(t)\mathfrak{S}(t)\,dt\mathfrak{S}^*(x), \qquad f \in L_2^r[a,b] \tag{1}$$

и является диссипативным K^r – оператором без невещественного спектра и существенной особенности в бесконечности.

Определение 2. Будем говорить, что K_+^r-оператор принадлежит классу $K_+^r(M)$,если $||\mathfrak{S}^*(x)\mathfrak{S}(x)|| \in L_1[a,b] \bigcap L_\infty[a,b]$, т.е. выполняются условия

$$\int_a^b ||\mathfrak{S}^*(x)\mathfrak{S}(x)||\, dx < \infty$$

$$\text{vrai} \max_{a \leqslant x \leqslant b} ||\mathfrak{S}^*(x)\mathfrak{S}(x)|| = M < \infty.$$

Согласно [6], для всякого $K_+^r(M)$ – оператора простая часть модели A подобна оператору умножения на независимую переменную

$$Q\varphi = x\varphi(x),$$

т.е. имеет место равенство

$$A = BQB^{-1}$$

на $H_A \bigcap \mathcal{D}(A)$, где H_A замыкание линейного многообразия в которое переходит $L_2^r[a,b]$ при умножении его элементов на $\mathfrak{S}^*(x)$ справа. При этом $\mathcal{D}(Q) = B^{-1}(H_A \bigcap \mathcal{D}(A))$ плотна в $L_2^r[a,b]$, операторы B и B^{-1} определяются, в терминах компонент полярного разложения предельных значений характеристической матрицы-функции, соотношениями

$$B\varphi = \frac{1}{2\pi}\frac{d}{dx}\int_x^b \varphi(\sigma)U(x,\sigma)\, d\sigma \mathfrak{S}^{-1}(x)$$

$$B^{-1}\varphi = \{\int_\sigma^b f'(x)U(x,\sigma)\, dx + f(a)\}G(\sigma)U(\sigma)$$

Приведенные выше свойства $K_+^r(M)$ операторов позволяют обосновать следующую теорему

Теорема 1. *Пусть A оператор класса $K_+^r(M)$. Тогда существует вещественная функция ограниченной вариации $\omega(t)$, такая что*

$$\mathrm{tr}[R_(\lambda)(A) - R_(\lambda)(A^*)] = -i\int_a^b \frac{d\omega(t)}{(t-\lambda)^2},$$

$\lambda \notin [a,b]$, где отрезок $[a,b]$ содержит спектр оператора $\mathfrak{S}(A)$.

Действительно, рассмотрим оператор A такой, что $A \in K_+^r(M)$. Тогда A унитарно эквивалентен треугольной модели (1). С учетом этого

$$R_\lambda(A) = \frac{f(x)}{x-\lambda} - i\int\limits_x^b f(t)\frac{\mathfrak{S}(t)\chi_A^{-1}(t,\lambda)}{t-\lambda}\,dt\,\frac{\chi_A(x,\lambda)\mathfrak{S}^*(x)}{x-\lambda}, \tag{2}$$

где

$$\chi_A(x,\lambda) = \overset{\frown}{\int\limits_x^b} \exp\left[-i\frac{\mathfrak{S}^*(t)\mathfrak{S}(t)}{t-\lambda}\,dt\right]. \tag{3}$$

И, соответственно,

$$R_\lambda(A^*) = \frac{f(x)}{x-\lambda} + i\int\limits_a^x f(t)\frac{\mathfrak{S}(t)\chi^{-1}(t,\lambda)}{t-\lambda}\,dt\,\frac{\chi(x,\lambda)\mathfrak{S}^*(x)}{x-\lambda}, \tag{4}$$

где

$$\chi_A(x,\lambda) = \overset{\frown}{\int\limits_a^x} \exp\left[i\frac{\mathfrak{S}^*(t)\mathfrak{S}(t)}{t-\lambda}\,dt\right]. \tag{5}$$

Из (3) и (5) имеем

$$\chi(x,\lambda) = \overset{\frown}{\int\limits_a^b} \exp\left[i\frac{\mathfrak{S}^*(t)\mathfrak{S}(t)}{t-\lambda}\,dt\right]\chi_A(x,\lambda) \tag{6}$$

$$\chi^{-1}(t,\lambda) = \chi_A^{-1}(t,\lambda)\overset{\frown}{\int\limits_a^b} \exp\left[-i\frac{\mathfrak{S}^*(t)\mathfrak{S}(t)}{t-\lambda}\,dt\right] \tag{7}$$

С учетом (1), (3), (6) и (7) получим соотношение

$$[R_\lambda(A) - R_\lambda(A^*)]\,f = -i\int\limits_a^b f(t)\frac{\mathfrak{S}(t)\chi_A^{-1}(t,\lambda)}{t-\lambda}\,dt\,\frac{\chi_A(x,\lambda)\mathfrak{S}^*(x)}{x-\lambda}.$$

Откуда следует

$$\operatorname{tr}[R_\lambda(A) - R_\lambda(A^*)] = -i\int\limits_a^b \frac{\operatorname{tr}\mathfrak{S}^*(t)\mathfrak{S}(t)}{(t-\lambda)^2}\,dt. \tag{8}$$

Рассмотрим

$$\omega = \int^t \operatorname{tr}\mathfrak{S}^*(s)\mathfrak{S}(s)\,ds. \tag{9}$$

Из (8) и (9) и следует утверждение теоремы.

Список литературы

1. Лившиц И.М. *Об одной задаче теории возмущений, связанной с квантовой статистикой.* // УМН. — 1952. — т.7(вып.1) — С. 171–189.
2. Крейн М.Г. *О формуле следов в теории возмущений.* // Матем. сб. — 1953. — т.33(вып.1) — С. 597–626.
3. Крейн М.Г. *Об определителях возмущения и формуле следов для унитарных и самосопряженных операторов.* // ДАН СССР. — 1962. — т.144, № 2. — С. 286–271.
4. Janger H. *Eine Erweiterung der Spurformel der Storumgstheorie.* // Math. Nachr. — 1965. — 30. — С. 123–135.
5. Сахнович Л.А. *Диссипативные операторы с абсолютно непрерывным спектром.* // Труды моск. мат. об-ва — 1968. — т.19 — С. 211–270.
6. Москалева Ю.П. *Неограниченные диссипативные операторы.* // Труды математического факультета. — Симферополь: из-во СГУ, 1997. — С. 88–89.