Ученые записки Таврического национального университета им. В. И. Вернадского

Серия "МАТЕМАТИКА" № 1 (2001) 65 - 70

УДК 517.430

ПРОСТРАНСТВО ГРАНИЧНЫХ ЗНАЧЕНИЙ СИММЕТРИЧЕСКОГО ОПЕРАТОРА

Кужель А. В.

В 1973 году, при исследовании диссипативных операторов. Талюш [4] обосновал следующее утверждение.

Теорема 1. *Пусть A — симметрический оператор с конечными и равными дефектными числами, а Γ_1 и Γ_2 — некоторые линейные операторы, отображающие область определения $\mathcal{D}(A^*)$ оператора A^* в n-мерное пространство X и такие, что*
1. $\Gamma_1 x = \Gamma_2 x = 0 \qquad (\forall x \in \mathcal{D}(A))$.
2. Для произвольных x и y из $\mathcal{D}(A^*)$

$$(A^*x, y) - (x, A^*y) = (\Gamma_1 x, \Gamma_2 y)_X - (\Gamma_2 x, \Gamma_1 y)_X. \tag{1}$$

3. Для произвольных векторов f и g из X существует такой вектор $x \in \mathcal{D}(A^*)$, что

$$\Gamma_1 x = f, \quad \Gamma_2 x = g. \tag{2}$$

Если при этом B — диссипативный оператор в пространстве X, то расширение A_B оператора A, определяемое условиями

$$A_B x = A^* x, \quad B\Gamma_2 x = \Gamma_1 x \quad (x \in \mathcal{D}(A^*)),$$

является максимальным диссипативным оператором.

В своей работе Талюш не обосновал существование операторов Γ_1 и Γ_2, которые удовлетворяли бы условиям сформулированной теоремы. Этот пробел был ликвидирован в 1975 году в работе Кочубея [5] (см. также [6] и [3]), в которых показано, что для произвольного симметрического оператора A с равными дефектными числами существуют операторы Γ_1 и Γ_2, удовлетворяющие условиям 1–3 теоремы Талюша. В этой же работе для тройки (X, Γ_1, Γ_2), где X — уже произвольное гильбертово пространство, принято называние: пространство граничных значений (ПГЗ) оператора A.

В 1976 году Брук [7] показал, что равенства

$$\Gamma_1 x = \Gamma_2 x = 0 \quad (x \in \mathcal{D}(A)),$$

которые содержаться в виде условий в определении из работы [5], являются следствием остальных условий (см., например, [6]).

Таким образом, в случае симметрических операторов с одинаковыми дефектными числами окончательным является следующее определение.

Определение 1. Тройка $(X, \vec{G}(\Omega_1)_1, \vec{G}(\Omega_1)_2)$, где X — некоторое гильбертово пространство со скалярным произведением $(\cdot,\cdot)_X$, а $\vec{G}(\Omega_1)_1$ и $\vec{G}(\Omega_1)_2$ — линейные операторы, отображающие $\mathcal{D}(A^*)$ в X, называется пространством граничных значений (ПГЗ) оператора A, если
1. Для произвольных x и y из $\mathcal{D}(A^*)$ имеет место равенство (1).
2. Для произвольных f и g из X в $\mathcal{D}(A^*)$ существует такой вектор x, что имеют место равенства (2).
Отметим следующие, представляющие интерес, утверждения.

Теорема 2. *Если* $(X, \vec{G}(\Omega_1)_1, \vec{G}(\Omega_1)_2)$ *— ПГЗ замкнутого симметрического оператора* A, *то*

$$\mathcal{D}(A) = (\ker \vec{G}(\Omega_1)_1) \cap (\ker \vec{G}(\Omega_1)_2). \tag{3}$$

Доказательство. Пусть $x \in \mathcal{D}(A)$, $f = -\vec{G}(\Omega_1)_2 x$, $g = \vec{G}(\Omega_1)_1 x$. на основании Определения 1 в $\mathcal{D}(A^*)$ существует такой вектор h, что $\vec{G}(\Omega_1)_1 h = -\vec{G}(\Omega_1)_2 x$, $\vec{G}(\Omega_1)_2 h = \vec{G}(\Omega_1)_1 x$. При этом, если $y = h$, то равенство (1) перепишется в виде

$$(Ax, h) - (x, A^*h) = \|\vec{G}(\Omega_1)_1 x\|_X^2 + \|\vec{G}(\Omega_1)_2 x\|_X^2. \tag{4}$$

Левая, а, следовательно, правая части в (4) равны нулю. Поэтому $\vec{G}(\Omega_1)_1 x = \vec{G}(\Omega_1)_2 x = 0$, то есть $x \in (\ker \vec{G}(\Omega_1)_1) \cap (\ker \vec{G}(\Omega_1)_2)$.

Наоборот, если при некотором x из $\mathcal{D}(A^*)$ $\vec{G}(\Omega_1)_1 x = \vec{G}(\Omega_1)_1 x = 0$, то, на основании равенства (1), при любом y из $\mathcal{D}(A^*)$,

$$(A^*y, x) = (y, A^*x)$$

и, следовательно, $x \in \mathcal{D}(A^{**}) = \mathcal{D}(A)$. Это и завершает доказательство равенства (3). $\square$

Пусть $x \in \mathcal{D}(A^*)$, $z(\Im z \neq 0)$ — фиксированное число и $\mathfrak{N}_z$, $\mathfrak{N}_{\overline{z}}$ — дефектные подпространства оператора A. На основании формул фон Неймана элемент x представим в виде

$$x = x_\circ + x(z) \qquad (x_\circ \in \mathcal{D}(A), x(z) = x_z + x_{\overline{z}} \in L_z),$$

где $L_z = \mathfrak{N}_z \dotplus \mathfrak{N}_{\overline{z}}$. При этом на основании Теоремы 2.

$$\vec{G}(\Omega_1)_1 x = \vec{G}(\Omega_1)_1 x(z), \qquad \vec{G}(\Omega_1)_2 x = \vec{G}(\Omega_1)_2 x(z). \tag{5}$$

Теорема 3. *Для любого симметрического оператора* A *с индексом дефекта* (n, n) $(n \leqslant \infty)$ *существует ПГЗ* $(X, \vec{G}(\Omega_1)_1, \vec{G}(\Omega_1)_2)$ *с* $\dim X = n$.

Доказательство. Пусть U — некоторый унитарный оператор, отображающий $\mathfrak{N}_{\overline{z}}$ на $\mathfrak{N}_z$. Рассмотрим линейные операторы $\vec{G}(\Omega_1)_1$ и $\vec{G}(\Omega_1)_2$, определяемые равенствами

$$\vec{G}(\Omega_1)_1 x = \overline{z} x_z + z U x_{\overline{z}}, \qquad \vec{G}(\Omega_1)_2 x = x_z + U x_{\overline{z}}, \tag{6}$$

где $x = x_0 + x_z + x_{\overline{z}}$, $x_0 \in \mathcal{D}(A)$, $x_z \in \mathfrak{N}_z$, $x_{\overline{z}} \in \mathfrak{N}_{\overline{z}}$. Если $x = 0$, то $x_z = x_{\overline{z}} = 0$ и, таким образом, операторы $\vec{G}(\Omega_1)_1$ и $\vec{G}(\Omega_1)_2$ корректно определены и каждый из них отображает $\mathcal{D}(A^*)$ в $\mathfrak{N}_z$.

Покажем, что тройка $(X, \vec{G}(\Omega_1)_1, \vec{G}(\Omega_1)_2)$ есть ПГЗ оператора A. Действительно, если $y = y_0 + y_z + y_{\overline{z}}$, то, как легко проверить, учитывая равенства

$$A^*x = Ax_0 + \overline{z}x_z + zx_{\overline{z}}, \; A^*y = Ay_0 + \overline{z}y_z + zy_{\overline{z}},$$

что

$$(A^*x, y) - (x, A^*y) = (z - \overline{z})[(x_{\overline{z}}, y_{\overline{z}}) - (x_z, y_z)]. \tag{7}$$

С другой стороны, на основании (6)

$$(\vec{G}(\Omega_1)_1 x, \vec{G}(\Omega_1)_2 y) - (\vec{G}(\Omega_1)_2 x, \vec{G}(\Omega_1)_1 y) = (z - \overline{z})[(x_{\overline{z}}, y_{\overline{z}}) - (x_z, y_z)]. \tag{8}$$

Таким образом, на основании (7) и (8), операторы A^*, $\vec{G}(\Omega_1)_1$, $\vec{G}(\Omega_1)_2$ связаны равенством (1).

Пусть f и g — произвольные векторы из $\mathfrak{N}_z$. Рассмотрим вектор $x = x_z + x_{\overline{z}}$, где

$$x_z = \frac{1}{z - \overline{z}}(zg - f), \qquad x_{\overline{z}} = \frac{1}{z - \overline{z}}U^{-1}(f - \overline{z}g).$$

Эти векторы принадлежат соответственно подпространствам $\mathfrak{N}_z$ и $\mathfrak{N}_{\overline{z}}$ и, как легко проверить,

$$\vec{G}(\Omega_1)_1 x = f, \qquad \vec{G}(\Omega_1)_2 x = g.$$

Таким образом, в соответствии с Определением 1, тройка $(\mathfrak{N}_z, \vec{G}(\Omega_1)_1, \vec{G}(\Omega_1)_2)$ является пространством граничных значений оператора A.

Отметим, что как операторы $\vec{G}(\Omega_1)_1$ и $\vec{G}(\Omega_1)_2$ из ПГЗ $(X, \vec{G}(\Omega_1)_1, \vec{G}(\Omega_1)_2)$, так и пространство X определяются неоднозначно. Действительно, выбирая различные операторы U в соотношениях (6), получим различные операторы $\vec{G}(\Omega_1)_1$ и $\vec{G}(\Omega_1)_2$.

Точно так же, вместо $\mathfrak{N}_z$ можно было взять $\mathfrak{N}_{\overline{z}}$ или вообще произвольное пространство X $(\dim X = \dim \mathfrak{N}_z)$, не обязательно являющееся подпространством пространства H.

Действительно, пусть X — произвольное гильбертово пространство размерность которого равна n $(= \dim \mathfrak{N}_z)$ и пусть V — некоторый унитарный оператор, отображающий $\mathfrak{N}_z$ на X. Если при этом операторы $\vec{G}(\Omega_1)_1$ и $\vec{G}(\Omega_1)_2$ определяются равенствами (6), то операторы $\vec{G}(\tilde{\Omega}_1)_1 = V\vec{G}(\Omega_1)_1$ и $\vec{G}(\tilde{\Omega}_1)_2 = V\vec{G}(\Omega_1)_2$ отображают $\mathcal{D}(A^*)$ в X и удовлетворяют условиям 1 и 2 из Определения 1.

И вообще, если $(X, \vec{G}(\Omega_1)_1, \vec{G}(\Omega_1)_2)$ есть ПГЗ симметрического оператора A и V — некоторый унитарный оператор, отображающий пространство X на гильбертово пространство $\tilde{X}$, то тройка $(\tilde{X}, \vec{G}(\Omega_1)_1, \vec{G}(\Omega_1)_2)$ так же является пространством граничных значений оператора A. □

Пример 1. Рассмотрим в пространстве $L_2(0,1)$ симметрический оператор A, определяемый следующим образом:

$$(Af)(x) = -if'(x) \quad (\mathcal{D}(A) = \{f \in \mathcal{D} \mid f(0) = f(1) = 0\}), \tag{9}$$

где $\mathcal{D}$ — множество абсолютно непрерывных функций в $L_2(0,1)$.

При $\Im z \neq 0$ дефектное подпространство $\mathfrak{N}_z$ оператора A является одномерным: $\mathfrak{N}_z = \{e_z\}$, где

$$e_z(x) = k(z)e^{i\overline{z}x}, \quad k(z) = \left(\frac{2\Im z}{e^{2\Im z} - 1}\right)^{\frac{1}{2}}, (\|e_z\| = 1).$$

Произвольный вектор f из $\mathcal{D}(A^*)$ представим в виде

$$f = f_\circ + f_z + f_{\overline{z}} \qquad (f_\circ \in \mathcal{D}(A), f_z \in \mathfrak{N}_z, f_{\overline{z}} \in \mathfrak{N}_{\overline{z}}).$$

В соответствии с (6) операторы $\vec{G}(\Omega_1)_1$ и $\vec{G}(\Omega_1)_2$ можем определить равенствами:

$$\vec{G}(\Omega_1)_1 = \overline{z}f_z + zUf_{\overline{z}}, \quad \vec{G}(\Omega_1)_2 f = f_z + Uf_{\overline{z}},$$

где $U : \mathfrak{N}_{\overline{z}} \to \mathfrak{N}_z$ — унитарный оператор и, следовательно (так как $\dim N_z = \dim_{\overline{z}} = 1$),

$$Uf_{\overline{z}} = \theta(f_{\overline{z}}, e_{\overline{z}})e_z \qquad (\theta \in \mathbb{C}, |\theta| = 1).$$

Но тогда операторы $\vec{G}(\Omega_1)_1$ и $\vec{G}(\Omega_1)_2$ представимы в виде

$$\vec{G}(\Omega_1)_1 f = [\overline{z}(f_z, e_z) + z\theta(f_{\overline{z}}, e_{\overline{z}})]e_z,$$
$$\vec{G}(\Omega_1)_2 f = [(f_z, e_z) + \theta(f_{\overline{z}}, e_{\overline{z}})]e_z.$$

Другой подход. Так как оператор A^* определяется на линеале $\mathcal{D}(A^*) = \mathcal{D}$ тем же равенством, что и оператор A, то, как легко проверить,

$$(A^*f, g) - (f, A^*g) = -i[f(x)\overline{g(x)}]\,|_0^1 = i[f(0)\overline{g(0)} - f(1)\overline{g(1)}]. \tag{10}$$

В связи с этим операторы $\vec{G}(\Omega_1)_1$ и $\vec{G}(\Omega_1)_2$, отображающие $\mathcal{D}(A^*)$ в пространство $X = \mathbb{C}$, будем искать в виде:

$$\vec{G}(\Omega_1)_1 f = af(0) + bf(1), \quad \vec{G}(\Omega_1)_2 f = cf(0) + df(1), \tag{11}$$

где a, b, c, d — некоторые комплексные числа.

В результате простых вычислений находим, что

$$\begin{gathered}(\vec{G}(\Omega_1)_1 f, \vec{G}(\Omega_1)_2 g)_X - (\vec{G}(\Omega_1)_2 f, \vec{G}(\Omega_1)_1 g)_X = \\ = (af(0) + bf(1))\overline{(cg(0) + dg(1))} - (cf(0) + df(1))\overline{(ag(0) + bg(1))} = \\ = (a\overline{c} - c\overline{a})f(0)\overline{g(0)} + (a\overline{d} - c\overline{b})F(0)\overline{g(1)} + (b\overline{c} - c\overline{a})F(1)\overline{g(0)} + (b\overline{d} - d\overline{b})f(1)\overline{g(1)}.\end{gathered} \tag{12}$$

На основании (1), (10),(12) приходим к заключению, что тройка $(X, \vec{G}(\Omega_1)_1, \vec{G}(\Omega_1)_2)$, где $X = \mathbb{C}$, а операторы $\vec{G}(\Omega_1)_1$ и $\vec{G}(\Omega_1)_2$ определяются равенствами (11), будет пространством граничных значений оператора A, если параметры a, b, c и d связаны соотношениями

$$a\bar{c} - c\bar{a} = i, \; a\bar{d} - c\bar{b} = 0, \; b\bar{d} - d\bar{b} = -i. \tag{13}$$

Соотношения (13) можно записать в матричном виде:

$$X^*JX = V, \tag{14}$$

где

$$X = \begin{Vmatrix} a & b \\ c & d \end{Vmatrix} \qquad J = \begin{Vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{Vmatrix} \qquad V = \begin{Vmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{Vmatrix}.$$

Из (14), в частности, следует, что $|\det X| = 1$.

Уравнение (14) а, следовательно, и система уравнений (13) имеет бесконечное множество решений. Так, например, решением уравнения (14) является матрица $X = \begin{Vmatrix} a & b \\ c & d \end{Vmatrix}$, где

$$a = p + (2c)^{-1}i, \; b = \bar{a}, \; d = c, \; c \neq 0, \; \{p, c\} \subset \mathbb{R}.$$

Более сложный пример рассмотрен в работе автора "Пространство граничных значений регулярного квазидифференциального оператора"(Уч. зап. Симферопольского ун-та, 1998. – №7(46). – С.85 – 92).

Примечание. Детальное построение и некоторые применения теории пространств граничных значений симметрических (плотно заданных) операторов содержаться в работах [7, 8].

В случае эрмитовых (не обязательно плотно заданных) операторов с одинаковыми дефектными числами основы теории пространств граничных значений были заложены в работах [9, 10]. В работах [11, 12] понятие ПГЗ было расширено на случай симметрических [11] и произвольных эрмитовых [12] операторов.

Результаты работ [9]–[12] предполагается систематизировать и изложить в следующих работах автора.

Список литературы

1. Кужель А.В. *Расширения эрмитовых операторов.* — К.: Вища школа,1989. — 56 С.
2. Kuzel A.V. *Characteristic Function and Models of Nonseif–Adjoint Operators.* — Kluwer, Dordrecth, 1996. — 273 P.
3. Kuzel A.V. and Kuzel S.A. *Regular Extentions of Hermitian Operators.* — VSP, Utrecht, 1998. — 273 P.
4. Талюш М.О. *Типова структура дисипативних операторів.* // Доп. АН УРСР. — 1973. — Сер.А,№11. – С. 993–996.
5. Кочубей А.Н. *О расширениях симметрических операторов и симметрических бинарных отношений.* // Мат. заметки. — 1975. — т.17,№1. — С. 41–48.
6. Брук В.М. *Об одном классе краевых задач со спектральным параметром в граничном условии.* // Матем. сб. — 1976. — т. 100,№2. – С. 210–216.
7. Горбачук В.И., Горбачук М.Л. *Граничные задачи для дифференциально операторных уравнений.* — К.: Наук. думка, 1984. — 238 С.

8. Горбачук В.И., Горбачук М.Л., Кочубей А.Н. *Теория расширений симметрических операторов и граничные задачи дифференциальных уравнений.*// Укр. матем. журн. — 1989. — т.41,№10. — С. 1299–1313.
9. Кужель А.В., Карпенко И.И. *Пространства граничных значений эрмитовых операторов.*// Деп. Укр. НИИНТИ. — 1989. — №766,Ук.89 — 8 С.
10. Кужель А.В., Карпенко И.И. *Пространства граничных значений неплотно заданного эрмитова оператора.*// Тезисы XIV школы по теории операторов ... (Новгород). — 1989. — ч.II. — С. 39.
11. Сторож О.Г. *О расширениях симметрических операторов с неравными дефектными числами.*// Мат. заметки. — 1984. — т.36,№5. — С. 791–796.
12. Кужель С.А. *О пространствах граничных значений и регулярных расширениях эрмитовых операторов.*// Укр. матем. журн. — 1990. — т.42,№6. — С. 860–865.