Ученые записки Таврического национального университета им. В. И. Вернадского

Серия "МАТЕМАТИКА" № 1 (2001) 60 – 64

УДК 514.12

О ДВОЙНОМ ОТНОШЕНИИ ЧЕТВЕРКИ ЛИНЕЙНЫХ ОБОЛОЧЕК ОРБИТ НАПРАВЛЕНИЙ СИММЕТРИИ БЕСКОНЕЧНОЙ ГРУППЫ, ПОРОЖДЕННОЙ ОТРАЖЕНИЯМИ

Криворучко А. И.

В [1; 2] и других работах В.Ф.Игнатенко изучается строение бесконечной группы G, удовлетворяющей следующим условиям:

(А) Группа действует на нецилиндрической алгебраической поверхности в n-мерном вещественном линейном пространстве V, порождается объединением q попарно непересекающихся и образованных отражениями множеств M_i, каждое из которых определяется некоторой плоскостью A_i и соответствующей квадратичной формой φ_i в следующем смысле: отражение относительно гиперплоскости P в направлении вектора d принадлежит M_i тогда и только тогда, когда $d \in A_i$, а P сопряжена d относительно φ_i.

(Б) Если два отражения принадлежат группе и не коммутируют между собой, то они оба принадлежат некоторому M_i.

Множество M_i будем называть квадратичным множеством отражений, а ядро Π_i сужения квадратичной формы φ_i на A_i — особой плоскостью множества M_i и группы G.

В [1; 2] показано, что строение группы G с ненулевыми особыми плоскостями в значительной степени определяется взаимным расположением этих плоскостей, а также получены некоторые ограничения на взаимное расположение особых плоскостей, имеющих ненулевые пересечения. Строение группы G с не более чем тремя ненулевыми особыми плоскостями известно [1 – 3].

В заметке изучаются группы G с четырьмя ненулевыми особыми плоскостями, попарные пересечения которых нульмерны. Рассмотрен случай, когда для таких плоскостей определено двойное отношение; показано, что оно не может быть произвольным, и найдены все его возможные значения, а также соответствующие этим значениям группы G и их базисные инварианты. Другие ограничения на взаимное расположение особых плоскостей группы G указаны в [4].

1°. Пусть Γ обозначает группу G, для которой $q = 4$, причем все четыре особые плоскости Π_i множеств M_i, объединение которых порождает группу Γ, имеют размерность $v \geq 1$, попарные пересечения этих плоскостей нульмерны, а $\dim \sum_i \Pi_i = 2v$. Для такой четверки плоскостей определено двойное отношение $D : \Pi_2 - \Pi_2$, являющееся произведением проекции Π_1 на Π_2 параллельно Π_3 и проекции Π_2 на Π_1 параллельно Π_4.

Группу G назовем *максимальной*, если каждое квадратичное множество отражений, сохраняющее все инварианты группы G, содержит не более одного из ее множеств M_i. При вычислении инвариантов группы Γ можно считать, что она максимальна.

Далее I_k обозначает единичную матрицу порядка k, $J_k(\alpha)$ — жорданова клетка порядка k с собственным значением α.

Теорема. *Если группа Γ максимальна и $v \geq 3$, то для некоторых вещественных отличных от 1 и ненулевых α, β жорданова каноническая форма двойного отношения D особых плоскостей группы Γ совпадает с одной из матриц*

$$\alpha I_{v-1} \oplus (\beta), \quad \alpha I_{v-2} \oplus J_2(\alpha).$$

2°. Докажем сформулированную в п. 1° теорему.

Для подмножества A линейного пространства $\langle A \rangle$ обозначает линейную оболочку A; если же N — некоторое множество преобразований пространства V, то $\langle N \rangle$ — группа, порождаемая N; $\mathbb{R}$ — поле вещественных чисел.

Пусть $\mu_i : A_i \to V^*$ — линейное отображение, сопоставляющее каждому вектору $a \in A_i$ линейную форму, сопряженную a относительно определяющей множество M_i квадратичной формы φ_i. Из (А) следует, что μ_i инъективно и самосопряжено, а проективизация μ_i (в отличие от φ_i) однозначно определяется множеством M_i.

Лемма. *Пусть $(b_k : k \geq 1)$ — базис в сумме всех особых плоскостей Π_i группы G, удовлетворяющей условиям (А) и (Б), $(\xi_{l'} : 1 \leq l' \leq m')$ — базис в сумме плоскостей $\Lambda_i := \mu_i(\Pi_i)$. Тогда $m' \leq n - \dim \sum_i A_i$ и в V найдется базис $(a_{ij}, b_k, c_l : i,j,k,l \geq 1)$ с координатными функциями $y_{ij} := a^*_{ij}$, $z_k := b^*_k$, $x_l := c^*_l$, для которого $A_i = \langle a_{ij} : j \geq 1 \rangle \oplus \Pi_i$, причем для каждого $i \geq 1$ система векторов $(a_{ij} : j \geq 1)$ ортонормирована относительно квадратичной формы φ_i, определяющей M_i, и $\xi_{l'} = x_{l'}$ $(l' \geq 1)$.*

Доказательство. Для любых $Y \subset V$ и $Z \subset V^*$ полагаем

$$Y^o = \{\xi \in V^* : \forall y \in Y\,(\xi(y) = 0)\}, \quad Z^o = \{v \in V : \forall \xi \in Z\,(\xi(v) = 0)\}.$$

Из определения μ_i следует, что $D_i := (\mu_i(A_i))^o$ совпадает с пересечением плоскостей, отражения относительно которых принадлежат M_i. $\Pi_i = A_i \cap D_i$, $\Lambda_i = (A_i + D_i)^o = A_i^o \cap \mu_i(A_i)$, а из условия Б) вытекает, что

$$i \neq k \Rightarrow A_i \subset D_k, \tag{1}$$

и $\sum_i \Pi_i \subset E := \bigcap_i D_i$.

Для каждого $i \leq v$ пусть A'_i — некоторое дополнение Π_i в A_i. Покажем, что

$$\sum_i A_i = (\bigoplus_i A'_i) \oplus (\sum_i \Pi_i) \subset \sum_i A_i + E = (\bigoplus_i A'_i) \oplus E, \tag{2}$$

$$(\sum_i A_i + E)^o = (\bigcap_i A_i^o) \cap (\sum_j D_j^o) = \sum_j (D_j^o \cap (\bigcap_i A_i^o)) =$$

$$= \sum_j (D_j^o \cap A_j^o) = \sum_i \Lambda_i. \qquad (3)$$

Пусть $a_k \in A'_k$, $d \in E$, $d + \sum_k a_k = 0$. Для любых $k \le v$ и $\xi \in D_k^o$ имеем: $\xi(d) = 0$, т.к. $E \subset D_k$; $\xi(a_i) = 0$ для каждого $i \ne k$ (см. (1)).

Следовательно, $\xi(a_k) = 0$, т.е. $a_k \in D_k^{oo} = D_k$. Но тогда

$$a_k \in A'_k \cap D_k = A'_k \cap (A_k \cap D_k) = A'_k \cap \Pi_k = \langle 0 \rangle .$$

При этом $\sum_i A_i + E = \sum_i A'_i + \sum_i \Pi_i + E = \sum_i A'_i + E$, и (2) доказано.

В силу (1), $D_j^o \subset A_i^o$ при $i \ne j$, а $D_j^o \cap A_j^o = \Lambda_j$, и получаем (3).

Из (3) следует, что если $(e_j \,:\, j \ge m'+1)$ — базис в $\sum_i A_i + E$, то $(\xi_i \,:\, i \le m')$ и $(e_j \,:\, j \ge m'+1)$ содержатся в сопряженных базисах пространств V^* и V.

Теперь в каждой плоскости A'_i выберем базис $(a_{ij} \,:\, j \ge 1)$, ортонормированный относительно сужения на эту плоскость квадратичной формы φ_i, а множество всех векторов b_k дополним до базиса в E векторами c_l $(l > m')$. Тогда из (2) и (3) следует, что $(a_{ij}, b_k, c_l \,:\, i,j,k \ge 1;\ l \ge m'+1)$ является базисом в $\sum_i A_i + E$ и этот базис содержится в удовлетворяющем условиям леммы базисе пространства V.

Зафиксируем в V для группы Γ (существующий по доказанной лемме) базис

$$(a_{ij},\, b_{1l},\, b_{2l},\, c_k \,:\, 1 \le i \le 4;\ 1 \le j \le k_i;\ 1 \le l \le v;\ 1 \le k \le m) \qquad (4)$$

с соответствующими координатными функциями $y_{ij} := a^*_{ij}$, $z_{il} := b^*_{il}$, $x_k := c^*_k$, относительно которого

$$\Pi_p = \langle b_{pl} \,:\, l \ge 1 \rangle \ \ (p \le 2),\ \ \Pi_3 = \langle b_{1l} + b_{2l} \,:\, l \ge 1 \rangle,\ \ \Pi_4 = \langle b_{1l} + D(b_{2l}) \,:\, l \ge 1 \rangle,$$
$$A_i = \langle a_{ij} \,:\, j \ge 1 \rangle \oplus \Pi_i,\ \ \mu_i(a_{ij}) = \varepsilon_{ij} y_{ij},\ \ |\varepsilon_{ij}| = 1,\ \ \Lambda_i \subset \langle x_k\, k \ge 1 \rangle \ \ (i,j \ge 1).$$

Базис (4), удовлетворяющий этим условиям, будем называть каноническим базисом группы Γ. В каноническом базисе (4) группы Γ положим

$$\xi_{1l} = \mu_1(b_{1l}),\quad \xi_{2l} = \mu_2(b_{2l}),\quad \xi_{3l} = \mu_3(b_{1l} + b_{2l}),\quad \xi_{4l} = \mu_4(b_{1l} + D(b_{2l})),$$
$$h_i = \sum_j \varepsilon_{ij} y_{ij}^2 \quad (i \ge 1),\quad \Phi_p = h_p + 2\sum_l z_{pl}\xi_{pl} \quad (p \le 2).$$

Пусть $M = \bigcup_i M_i$, $H^{(j)} = \left\langle \bigcup_{i \ne j} M_i \right\rangle$, $X = \mathbb{R}[x_1, \dots, x_m]$, $X' = \mathbb{R}(x_1, \dots, x_m)$, S — кольцо всех целых вещественных инвариантов группы Γ, S' — поле всех вещественных рациональных инвариантов группы Γ, Δ — матрица D в базисе $(b_{2l} \,:\, l \ge 1)$ (и можно считать, что Δ — вещественная жорданова каноническая форма D),

$$(\tilde\xi_{21}\ \dots\ \tilde\xi_{2v}) = (\xi_{21}\ \dots\ \xi_{2v})\Delta,\quad \tilde b_{2l} = D(b_{2l}),$$
$$g = g(z_{11}, z_{21}, \bar z_1, \bar z_2, \bar y_1, \dots, \bar y_4, \bar x\,) \in S',$$

где $\bar z_i = (z_{il} \,:\, l > 1)$, $\bar y_i = (y_{ij} \,:\, j \ge 1)$, $\bar x = (x_k \,:\, k \ge 1)$.

В базисе

$$(a_{ij},\, b_{1l},\, \tilde b_{2l},\, c_k \,:\, 1 \le i \le 4;\ 1 \le j \le k_i;\ 1 \le l \le v;\ 1 \le k \le m) \qquad (5)$$

с координатными функциями $x_k = c_k^*$, $y_{ij} = a_{ij}^*$, $z_{1l} = b_{1l}^*$, $\tilde{z}_{2l} := \tilde{b}_{2l}^*$ имеем:

$$\Phi_2 = \sum_{j,l} (\varepsilon_{2j} y_{2j}^2 + 2\tilde{z}_{2l}\tilde{\xi}_{2l}). \tag{6}$$

Применяя равенство (8) работы [3] для $r := g$, $H := \langle M_2 \rangle$ и базиса (4), заменяя M_i при $i \neq 2$ пустыми множествами отражений, получаем

$$g = g(z_{11}, \tfrac{1}{2}\Phi_2\xi_{21}^{-1}, \tilde{z}_l, \bar{0}, \bar{y}_1, \bar{0}, \bar{y}_3, \bar{y}_4, \bar{x}) = r_0(z_{11}, \Phi_2, \bar{z}_1, \bar{y}_1, \bar{y}_3, \bar{y}_4), \tag{7}$$

где r_0 — рациональная над X' функция (соответственно, многочлен над X, если $g \in S$) от переменных Φ_2, z_{1l}, y_{ij} $(i, j, l \geq 1;\ i \neq 2)$.

Применяя к каждой из двух групп $H^{(j)}$ $(j \geq 3)$ результаты работы [3], для некоторых вещественных констант $\beta_i \neq 0$, λ_l, ν_l, а также линейных форм f_i, g_i, принадлежащих $\langle x_1, \ldots, x_m \rangle$, в базисе (4) группы Γ имеем:

$$f_1 \nparallel f_2, \quad g_1 \nparallel g_2, \quad \xi_{1l} = \xi_{3l} + \lambda_l f_1, \quad \xi_{2l} = \xi_{3l} + \lambda_l f_2,$$

$$\xi_{1l} = \beta_1\xi_{4l} + \nu_l g_1, \quad \tilde{\xi}_{2l} = \beta_2\xi_{4l} + \nu_l g_2 \quad (l \geq 1). \tag{8}$$

Положим $F_i = \Phi_i + h_3 + \beta_i h_4$, $\alpha = \beta_2\beta_1^{-1}$. Имеются две возможности.

1) $\lambda_l = \nu_l = 0$ для всех $l \geq 1$, и тогда $\Delta = \alpha I_v$.

Применяя равенство (8) работы [3] для $r := g$, $H := H^{(4)}$ и базиса (4), а затем для $H := H^{(3)}$ и базису (5), и учитывая (6), из (7) последовательно получаем:

$$g = r_0(z_{11}, \Phi_2, \bar{z}_1, \bar{y}_1, \bar{y}_3, \bar{y}_4) = r_0(\tfrac{1}{2}(\Phi_1 + h_3)\xi_{31}^{-1}, \Phi_2 + h_3, \bar{0}, \bar{y}_4) =$$
$$r_0(\tfrac{1}{2}(\Phi_1 + h_3 + \beta_1 h_4)\xi_{31}^{-1}, \Phi_2 + h_3 + \beta_2 h_4, \bar{0}).$$

Это означает, что

$$S' = X'(F_1, F_2), \quad S = X[F_1, F_2], \tag{9}$$

2) Хотя бы одна из констант λ_l, ν_l, отлична от 0.

При соответствующей нумерации множеств M_i, можем считать, что некоторое $\nu_l \neq 0$. Положим

$$K_{ip} = \xi_{i1}\xi_{3p} - \xi_{ip}\xi_{31} = (\lambda_1\xi_{3p} - \lambda_p\xi_{31})f_i, \quad K_p = \xi_{11}\xi_{4p} - \xi_{1p}\xi_{41} = (\nu_1\xi_{4p} - \nu_p\xi_{41})g_1.$$

Из линейной независимости форм ξ_{4p} следует, что некоторое $K_p \neq 0$. Применяя равенства (11) и (12) работы [3] для $r = g$, $H = H^{(3)}$ и базиса (5), и учитывая (6), из (7) имеем:

$$g = r_1(g_1\Phi_2 - g_2\Phi_1 + (\beta_2 g_1 - \beta_1 g_2)h_4, \bar{y}_3), \tag{10}$$

где r_1 — рациональная над X' функция. Теперь из (10), (8), а также равенств (5) и (10) работы [3] для $r := g$, $H := H^{(4)}$, базиса (4), при любом $p \leq v$ получаем:

$$g = r_1(F_2 g_1 - F_1 g_2 + (g_1 f_2 - g_2 f_1)(\lambda_1 h_3 \xi_{31}^{-1} + 2t(\lambda_p\xi_{31} - \lambda_1\xi_{3p})), \bar{0}),$$

Поэтому если $g_1 f_2 - g_2 f_1 \neq 0$ и некоторое $\lambda_l \neq 0$, то $S' = X'$. Если же $g_1 f_2 - g_2 f_1 = 0$, то из $g_1 \nparallel g_2$ следует, что

$$f_i = \varrho g_i \tag{11}$$

для некоторого вещественного ϱ $(i \leq 2)$; если все $\lambda_l = 0$, то соотношения (8) не содержат f_1 и f_2, и можно считать, что (12) выполняется для $\varrho = 1$. Но из (8), (12) и (11)

$$(\Delta - \alpha I_v)^T \begin{pmatrix} \xi_{21} \\ \vdots \\ \xi_{2v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varrho\lambda_1 - \nu_1 \\ \vdots \\ \varrho\lambda_v - \nu_v \end{pmatrix} \alpha g_1 + \begin{pmatrix} \nu_1 - \alpha\varrho\lambda_1 \\ \vdots \\ \nu_v - \alpha\varrho\lambda_v \end{pmatrix} g_2 \tag{12}$$

и $g = r_1(F_2 g_1 - F_1 g_2, \bar{0})$, причем $F_2 g_1 - F_1 g_2$ и x_t сохраняются отражениями, принадлежащими M. Отсюда

$$S' = X'(F_2 g_1 - F_1 g_2), \quad S = X[F_2 g_1 - F_1 g_2]. \tag{13}$$

Из (13) имеем: $1 \leq \mathrm{rk}(\Delta - \alpha I_v) \leq 2$. Но если $\Delta - \alpha I_v = C \oplus 0$, где C — невырожденная матрица второго порядка, то из (13), (8) и (12) получаем:

$$\xi_{ij} \in \langle g_1, g_2 \rangle \tag{14}$$

для $i, j \leq 2$. Если же $\Delta = J_2(\alpha) \oplus J_2(\alpha) \oplus \alpha I_{v-4}$, то имеем (15) для всех $i \leq 2$ и $j \in \{2; 4\}$. Если $\Delta = J_3(\alpha) \oplus \alpha I_{v-3}$, то получаем (15) для $i \leq 2 \leq j \leq 3$. В любом из этих трех случаев $g_2\Phi_1 - g_1\Phi_2 = g_1^2\sigma_1 + g_1 g_2 \sigma_2 + g_2^2 \sigma_3 + f$, где каждая σ_l — линейная комбинация четырех соответствующих форм z_{ij}, от которых многочлен f не зависит; но это, в силу (14), означает, что Γ может действовать лишь на цилиндрических алгебраических поверхностях. Следовательно, $\mathrm{rk}(\Delta - \alpha I_v) = 1$.

Замечание. Пусть для группы Γ в ее каноническом базисе (4) выполняются соотношения (8). Если при этом все λ_l и ν_l равны 0, то из (9) следует, что Γ *полна*, т.е. содержит все отражения, сохраняющие каждый ее инвариант. Очевидно, такая группа максимальна. Если же некоторое $\nu_l \neq 0$ и $\mathrm{rk}(\Delta - \alpha I_v) = 1$, то из (14) следует максимальность группы Γ; но ее полнота эквивалентна тому, что и некоторое $\lambda_l \neq 0$.

Список литературы

1. Игнатенко В.Ф. *О геометрической теории инвариантов групп, порожденных отражениями* // Итоги науки и техники. Сер. Пробл. геометрии / ВИНИТИ. – М., 1989. – Т. 21. — С. 155–208.
2. Игнатенко В.Ф. *Диаметральная теория алгебраических поверхностей и геометрическая теория инвариантов групп, порожденных отражениями. III* // Укр.матем.журн. – 1998. – Т. 50, № 10. – С. 1324–1340.
3. Криворучко А.И. *О рациональных инвариантах специальных групп, порожденных отражениями* // Динамические системы. – 1999. – Вып. 18. – С. 170–177.
4. Криворучко А.И. *Об инвариантах и орбитах направлений симметрии бесконечных групп, порожденных отражениями* // Тезисы докл. международной конф. по геометрии "в целом". – Черкассы, 1999. – С. 74–75.