Ученые записки Таврического национального университета им. В. И. Вернадского

Серия "МАТЕМАТИКА" № 1 (2001) 50 – 59

УДК 517.430

ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ ЭРМИТОВЫХ ОПЕРАТОРОВ

Карпенко И. И.

В статье А.Н.Кочубея [2] изучены свойства характеристической функции симметрического оператора, определенной в терминах пространства граничных значений операторов данного класса. В настоящей работе понятие характеристической функции обобщается на случай эрмитова (неплотно заданного) оператора. При этом используются пространства граничных значений в смысле определения, приведенного в работе [3]. Полученные результаты позволяют исследовать более широкий класс эрмитовых операторов и их регулярных расширений.

Диссипативные и аккумулятивные расширения эрмитовых операторов

Пусть (X, Γ_1, Γ_2) — пространство граничных значений эрмитова оператора A, $\tilde{A}$ – его регулярное диссипативное (аккумулятивное) расширение. Согласно [1], для любого невещественного λ, $\operatorname{Im}\lambda > 0$ ($\operatorname{Im}\lambda < 0$) $D(\tilde{A}) = D(A)\dot{+}L_{\tilde{A}}$, где $L_{\tilde{A}} = (I + \Phi(\lambda))D(\Phi) \subset \mathfrak{N}_\lambda\dot{+}\mathfrak{N}_{\bar{\lambda}}$. На множестве $x \in L_{\tilde{A}}$ зададим операторы $K_\pm$, удовлетворяющие следующим условиям:

$$K_+(\Gamma_1 + i\Gamma_2)x = (\Gamma_1 - i\Gamma_2)x \qquad (\operatorname{Im}\lambda > 0) \tag{1}$$

$$K_-(\Gamma_1 - i\Gamma_1)x = (\Gamma_1 + i\Gamma_2)x \qquad (\operatorname{Im}\lambda < 0) \tag{2}$$

Проверим корректность задания оператора K_+ формулой (1). Пусть $(\Gamma_1 + i\Gamma_2)x = 0$, $x = x_\lambda + x_{\bar{\lambda}}$. Тогда в соответствии с определением ПГЗ [3]

$$(\Gamma_1 x, \Gamma_2 x) - (\Gamma_2 x, \Gamma_1 x) = (\lambda - \bar{\lambda})(\|x_{\bar{\lambda}}\|^2 - \|x_\lambda\|^2),$$

откуда, с учетом равенств $\Gamma_1 x = -i\Gamma_2 x$ и $x_{\bar{\lambda}} = \Phi x_\lambda$, имеем

$$-\|\Gamma_2 x\|^2 = \operatorname{Im}\lambda(\|\Phi x_\lambda\|^2 - \|x_\lambda\|^2).$$

Так как $\operatorname{Im}\lambda(\|\Phi x_\lambda\|^2 - \|x_\lambda\|^2) \geq 0$, то $\|\Gamma_2 x\| = 0$, откуда $\Gamma_2 x = \Gamma_1 x = 0$, и, следовательно, $x = 0$.

Покажем, что оператор K_+ является сжатием. Действительно,

$$\|K_+(\Gamma_1 + i\Gamma_2)x\|^2 = \|(\Gamma_1 - i\Gamma_2)x\|^2 = \|\Gamma_1 x\|^2 + \|\Gamma_2 x\|^2 +$$
$$+ i((\Gamma_1 x, \Gamma_2 x) - (\Gamma_2 x, \Gamma_1 x)) = \|\Gamma_1 x\|^2 + \|\Gamma_2 x\|^2 - 2\operatorname{Im}\lambda(\|\Phi x_\lambda\|^2 - \|x_\lambda\|^2),$$
$$\|(\Gamma_1 + i\Gamma_2)x\|^2 = \|\Gamma_1 x\|^2 + \|\Gamma_2 x\|^2 + 2\operatorname{Im}\lambda(\|\Phi x_\lambda\|^2 - \|x_\lambda\|^2).$$

Тогда

$$\|K_+(\Gamma_1 + i\Gamma_2)x\|^2 - \|(\Gamma_1 + i\Gamma_2)x\|^2 = -4\operatorname{Im}\lambda(\|\Phi x_\lambda\|^2 - \|x_\lambda\|^2) \le 0,$$

откуда следует, что $\|K_+\| \le 1$.

Аналогично проверяются соответствующие результаты для оператора K_-.

Таким образом, доказана следующая теорема.

Теорема 1. *Всякое регулярное диссипативное (аккумулятивное) расширение эрмитова оператора A определяет формулой (1),((2)) сжимающий оператор $K_+ \in [X]$ ($K_- \in [X]$).*

Пусть (X, Γ_1, Γ_2) — пространство граничных значений эрмитова оператора A, K — строгое сжатие в X. Обозначим через L множество векторов $x \in \mathfrak{N}_\lambda \dot{+} \mathfrak{N}_{\bar\lambda}$ $(\operatorname{Im}\lambda \ne 0)$ таких, что

$$K(\Gamma_1 + i\Gamma_2)x = (\Gamma_1 - i\Gamma_2)x \qquad (\operatorname{Im}\lambda > 0) \tag{3}$$

или

$$K(\Gamma_1 - i\Gamma_2)x = (\Gamma_1 + i\Gamma_2)x \qquad (\operatorname{Im}\lambda < 0) \tag{4}$$

Рассмотрим, в частности, многообразие L, определяемое равенством (1.3). Так как $\|K(\Gamma_1 + i\Gamma_2)x\| < \|(\Gamma_1 + i\Gamma_2)x\|$, $x \ne 0$, то непосредственными вычислениями можно показать, что

$$\operatorname{Im}(\Gamma_1 x, \Gamma_2 x) > 0, \ (x \ne 0) \tag{5}$$

Пусть $x = x'_\lambda + x_{\bar\lambda}$, $\tilde{x} = x''_\lambda + x_{\bar\lambda}$ - векторы из L, тогда $x - \tilde{x} = x'_\lambda - x''_\lambda = x_\lambda \in L$ и

$$\operatorname{Im}(\Gamma_1 x_\lambda, \Gamma_2 x_\lambda) \ge 0 \tag{6}$$

С другой стороны

$$(\Gamma_1 x_\lambda, \Gamma_2 x_\lambda) - (\Gamma_2 x_\lambda, \Gamma_1 x_\lambda) = -(\lambda - \bar\lambda)(x_\lambda, x_\lambda),$$

следовательно,

$$\operatorname{Im}(\Gamma_1 x_\lambda, \Gamma_2 x_\lambda) = -\operatorname{Im}\lambda\|x_\lambda\|^2 \le 0 \tag{7}$$

Сравнивая (6) и (7), приходим к выводу, что $\|x_\lambda\| = 0$,т.е. $x'_\lambda = x''_\lambda$. Следовательно, вектор $x_{\bar\lambda} \in \mathfrak{N}_{\bar\lambda}$ однозначно определяет вектор x_λ такой, что $x_{\bar\lambda} + x_\lambda \in L$. Положим $\Phi x_{\bar\lambda} = x_\lambda$, $D(\Phi) \subset \mathfrak{N}_{\bar\lambda}$.

Докажем, что $\dim D(\Phi) = \dim \mathfrak{N}_{\bar\lambda}$. В самом деле, если $\dim D(\Phi) < \dim \mathfrak{N}_{\bar\lambda}$, то $\dim(I + \Phi)D(\Phi) < \dim \mathfrak{N}_{\bar\lambda}$ и, как следствие, $\dim L < \dim \mathfrak{N}_{\bar\lambda}$. Тогда $\dim(\Gamma_1 + i\Gamma_2)L < \dim \mathfrak{N}_{\bar\lambda}$, откуда следует, что $(\Gamma_1 + i\Gamma_2)L \ne X$, так как $\dim X = \dim \mathfrak{N}_{\bar\lambda}$. Но в то же время для любого $\varphi \in X$ и пары $(\varphi, K\varphi)$ существует вектор $x \in \mathfrak{N}_\lambda \dot{+} \mathfrak{N}_{\bar\lambda}$ такой, что

$$(\Gamma_1 + i\Gamma_2)x = \varphi, \ (\Gamma_1 - i\Gamma_2)x = K\varphi.$$

В качестве такого вектора x следует взять прообраз пары $\Gamma_1 x = \frac{1}{2}(\varphi + K\varphi)$, $\Gamma_2 x = \frac{1}{2i}(\varphi - K\varphi)$, который существует согласно определению ПГЗ [3]. Таким образом, для данного x

$$K(\Gamma_1 + i\Gamma_2)x = (\Gamma_1 - i\Gamma_2)x,$$

откуда $x \in L$.

Полученное противоречие доказывает, что $D(\Phi) = \mathfrak{N}_{\bar\lambda}$, $L = (I + \Phi)\mathfrak{N}_{\bar\lambda}$.

Отметим, что заданный таким образом оператор Φ является сжатием. Это следует из очевидного равенства

$$\operatorname{Im}(\Gamma_1 x, \Gamma_2 x) = \operatorname{Im}\lambda(\|x_{\bar\lambda}\| - \|\Phi x_{\bar\lambda}\|)$$

и отношения (4). Покажем, что $L \cap D(A) = 0$. Пусть вектор $x = x_\lambda + x_{\bar\lambda} \in L \cap D(A)$. Тогда из равенства $(Ax, x) = (x, Ax)$ следует:

$$(Ax, x_\lambda) + (Ax, x_{\bar\lambda}) = (x_\lambda, Ax) + (x_{\bar\lambda}, Ax)$$

или

$$\lambda(x, x_\lambda) + \bar\lambda(x, x_{\bar\lambda}) = \bar\lambda(x_\lambda, x) + \lambda(x_{\bar\lambda}, x),$$

и в результате получаем $\|x_\lambda\| = \|x_{\bar\lambda}\|$. Допустим, что $x \neq 0$. Тогда, с учетом (4), $\operatorname{Im}(\Gamma_1 x, \Gamma_2 x) > 0$. В то же время

$$(\Gamma_1 x, \Gamma_2 x) - (\Gamma_2 x, \Gamma_1 x) = 2i \operatorname{Im}\lambda(\|x_{\bar\lambda}\|^2 - \|x_\lambda\|^2) = 0.$$

Полученное противоречие означает, что $x = 0$ и линеалы L и $D(A)$ линейно независимы.

Зададим на множестве векторов вида

$$x = x_0 + x_{\bar\lambda} + \Phi x_{\bar\lambda} \quad (x_0 \in D(A),\ x_{\bar\lambda} \in \mathfrak{N}_{\bar\lambda}) \tag{8}$$

линейный оператор

$$\tilde A x = Ax_0 + \lambda x_{\bar\lambda} + \bar\lambda \Phi x_{\bar\lambda}. \tag{9}$$

Согласно [1], этот оператор является регулярным диссипативным расширением эрмитова оператора A.

Кроме того, оператор $\tilde A$ является максимальным диссипативным оператором. Для доказательства рассмотрим $\Delta(\tilde A - \bar\lambda I)$, $(\operatorname{Im}\lambda > 0)$. Для любого $x \in D(\tilde A)$ в соответствии с (1.7),(1.8) $(\tilde A - \bar\lambda I)x = (A - \bar\lambda I)x_0 + (\lambda - \bar\lambda)x_{\bar\lambda}$. Так как A — замкнутый эрмитов оператор, и $\bar\lambda$ — его точка регулярного типа, то $\Delta(A - \bar\lambda I)$ есть подпространство в H и

$$\Delta(\tilde A - \bar\lambda I) = \Delta(A - \bar\lambda I) \oplus \mathfrak{N}_{\bar\lambda} = H.$$

Согласно [5], оператор $\tilde A$ является максимальным диссипативным оператором.

Если многообразие L определить формулой (4), то аналогично построенный оператор $\tilde A$ будет максимальным аккумулятивным оператором. Таким образом, доказана следующая теорема.

Теорема 2. *Пусть A — замкнутый эрмитов оператор в H с равными и конечными дефектными числами,(X, Γ_1, Γ_2) — его ПГЗ. Тогда всякое сжатие $K \in [X]$ посредством формулы (3) ((4)) задает максимальное диссипативное (аккумулятивное) расширение оператора A.*

Обозначим через A_K и A^K максимальное диссипативное и максимальное аккумулятивное расширения оператора A, заданные сжатием $K \in [X]$ посредством формул (3) и (4) соответственно.

В дальнейшем полезным оказывается следующее утверждение.

Теорема 3.

$$(A_K)^* = A^{K^*}$$

Доказательство. Согласно определению, для $x \in D(A_K)$ $x = x_0 + x_\lambda + x_{\bar\lambda}$, причем, $K(\Gamma_1 + i\Gamma_2)\hat{x} = (\Gamma_1 - i\Gamma_2)\hat{x}$ $(\hat{x} = x_\lambda + x_{\bar\lambda})$, и $A_K x = Ax_0 + \bar\lambda x_\lambda + \lambda x_{\bar\lambda}$. Для $y \in D(A^{K^*})$ $y = y_0 + y_\lambda + y_{\bar\lambda}$, причем $K^*(\Gamma_1 - i\Gamma_2)\hat{y} = (\Gamma_1 + i\Gamma_2)\hat{y}$ $(\hat{y} = y_\lambda + y_{\bar\lambda})$, и $A^{K^*}y = Ay_0 + \bar\lambda y_\lambda + \lambda y_{\bar\lambda}$. Тогда для любого $x \in D(A^K)$, $y \in D(A^{K^*})$

$$(A_K x, y) - (x, A^{K^*}y) = (\lambda - \bar\lambda)[(x_{\bar\lambda}, y_{\bar\lambda}) - (x_\lambda, y_\lambda)] = (\Gamma_1\hat{x}, \Gamma_2\hat{y}) - (\Gamma_2\hat{x}, \Gamma_1\hat{y}) =$$

$$= \frac{1}{2i}[((\Gamma_1 - i\Gamma_2)\hat{x}, (\Gamma_1 - i\Gamma_2)\hat{y}) - -((\Gamma_1 + i\Gamma_2)\hat{x}, (\Gamma_1 + i\Gamma_2)\hat{y})] =$$

$$= \frac{1}{2i}[(K(\Gamma_1 + i\Gamma_2)\hat{x}, (\Gamma_1 - i\Gamma_2)\hat{y}) - ((\Gamma_1 + i\Gamma_2)\hat{x}, K^*(\Gamma_1 - i\Gamma_2)\hat{y})] = 0,$$

откуда и следует утверждение теоремы. □

Характеристические функции эрмитовых операторов

Пусть A — замкнутый эрмитов оператор с конечными и равными дефектными числами, (X, Γ_1, Γ_2) — его пространство граничных значений. Рассмотрим расширение A_λ оператора A с областью определения

$$D(A_\lambda) = D(A) \dot{+} \mathfrak{N}_{\bar\lambda}, \quad \operatorname{Im}\lambda \neq 0,$$

которое определяется равенством

$$A_\lambda(x_0 + x_{\bar\lambda}) = Ax_0 + \lambda x_{\bar\lambda}.$$

Как показано в [5], при $\operatorname{Im}\lambda > 0$ ($\operatorname{Im}\lambda < 0$) этот оператор является максимальным диссипативным (аккумулятивным) оператором.

Пусть λ_0 — фиксированное невещественное число. Тогда произвольный вектор $x \in D(A_\lambda)$ представим в виде [1]

$$x = x_0 + x_{\lambda_0} + \Phi(\lambda)x_{\lambda_0}, \tag{10}$$

где $x_0 \in D(A)$, $x_{\lambda_0} \in D(\Phi)$, а $\Phi(\lambda)$ — некоторый оператор, действующий из $\mathfrak{N}_{\lambda_0}$ в $\mathfrak{N}_{\bar\lambda_0}$, причем

$$A_\lambda x = Ax_0 + \bar\lambda_0 x_{\lambda_0} + \lambda_0\Phi(\lambda)x_{\lambda_0} \tag{11}$$

Обозначим $L_{A_\lambda} = (I + \Phi(\lambda))D(\Phi)$. В этом случае на множестве L_{A_λ} корректно определена функция (см.1)

$$C(\lambda)(\Gamma_1 + i\Gamma_2)\hat{x} = (\Gamma_1 - \Gamma_2)\hat{x} \quad (\operatorname{Im}\lambda > 0) \tag{12}$$

$$C(\lambda)(\Gamma_1 - i\Gamma_2)\hat{x} = (\Gamma_1 + i\Gamma_2)\hat{x} \quad (\operatorname{Im}\lambda < 0), \tag{13}$$

где $\hat{x} = x_{\lambda_0} + \Phi(\lambda)x_{\lambda_0}$.

Определение. Оператор-функция $C(\lambda)$ называется характеристической функцией эрмитова оператора A.

Как показано в теореме 1, $C(\lambda)$ — сжимающая оператор-функция.

Отметим некоторые свойства характеристической функции.

Теорема 4. $C(\bar{\lambda}) = C(\lambda)^*$.

Доказательство. Согласно результатам, полученным в предыдущем разделе, равенство (12) определяет максимальный диссипативный оператор $A_{C(\lambda)} = A_\lambda$, а равенство (13) — максимальный аккретивный оператор $A^{C(\lambda)}$, причем, в силу теоремы 2, $(A_{C(\lambda)})^* = A^{C^*(\lambda)}$. Но, как известно, $A_\lambda^* = A_{\bar{\lambda}}$, поэтому $(A_{(C\lambda)})^* = A^{C(\bar{\lambda})}$. Следовательно, $C(\bar{\lambda}) = C(\lambda)^*$. □

Определенная таким образом характеристическая функция зависит, очевидно, от выбора пространства граничных значений. Выберем пространство граничных значений следующим образом:

$$X^0 = \mathfrak{N}_{-i}$$

$$\Gamma_1^0(x_\lambda + x_{\bar{\lambda}}) = U(\lambda)x_\lambda + U(\bar{\lambda})x_{\bar{\lambda}}$$

$$\Gamma_2^0(x_\lambda + x_{\bar{\lambda}}) = \lambda U(\lambda)x_\lambda + \bar{\lambda}U(\bar{\lambda})x_{\bar{\lambda}},$$

где $U(\lambda)$ — унитарный оператор, действующий из $\mathfrak{N}_\lambda$ в $\mathfrak{N}_{-i}$. Тогда для вектора $\hat{x} = x_{-i} + \Phi(\lambda)x_{-i} \in L_{A_\lambda}$

$$\Gamma_1^0(x_{-i} + \Phi(\lambda)x_{-i}) = x_{-i} + U(i)\Phi(\lambda)x_{-i}$$

$$\Gamma_2^0(x_{-i} + \Phi(\lambda)x_{-i}) = -ix_{-i} + iU(i)\Phi(\lambda)x_{-}$$

Поэтому $(\Gamma_1^0 + i\Gamma_1^0)\hat{x} = 2x_{-i}$, а $(\Gamma_1^0 - i\Gamma_2^0)\hat{x} = 2U(i)\Phi(\lambda)x_{-i}$. Следовательно,

$$C^0(\lambda)x_{-i} = U(i)\Phi(\lambda)x_{-i} \quad (\operatorname{Im}\lambda > 0),$$

т.е. $C^0(\lambda) = U(i)\Phi(\lambda)$, $(\operatorname{Im}\lambda > 0)$.

Как известно [4], функция $C_0(\lambda) = -\Phi(\lambda)$ является характеристической функцией Штрауса. Таким образом, при определенном выборе ПГЗ функция $C^0(\lambda)$ несущественным образом отличается от характеристической функции Штрауса:

$$C^0(\lambda) = -U(i)C_0(\lambda) \quad (\operatorname{Im}\lambda > 0).$$

Теорема 5. *Пусть A_1, A_2 — замкнутые эрмитовы операторы с равными и конечными дефектными числами, действующие в гильбертовых пространствах H_1, H_2 соответственно; $C_1(\lambda), C_2(\lambda)$ — характеристические функции этих операторов. Тогда функция $C(\lambda) = C_1(\lambda) \oplus C_2(\lambda)$ является характеристической функцией эрмитова оператора $A = A_1 \oplus A_2$.*

Доказательство. Пусть функции $C_k(\lambda)$ построены для пространств граничных значений $(X^k, \Gamma_1^k, \Gamma_2^k)$ $(k = 1, 2)$. Нетрудно показать, что тройка $(X, \Gamma_1, \Gamma_2) = (X^1 \oplus X^2, \Gamma_1^1 \oplus \Gamma_1^2, \Gamma_2^1 \oplus \Gamma_2^2)$ является ПГЗ эрмитова оператора A. В пространстве $X = X^1 \oplus X^2$ рассмотрим оператор-функцию $C(\lambda) = C_1(\lambda) \oplus C_2(\lambda)$. Для $\operatorname{Im}\lambda > 0$

$$C(\lambda)(\Gamma_1 + i\Gamma_2)\hat{x} = ((C_1(\lambda) \oplus C_2(\lambda))((\Gamma_1^1 + i\Gamma_2^1) \oplus (\Gamma_1^2 + i\Gamma_2^2))(\hat{x}_1 + \hat{x}_2) =$$
$$= C_1(\lambda)(\Gamma_1^1 + i\Gamma_2^1)\hat{x}_1 + C_2(\lambda)(\Gamma_1^2 + i\Gamma_2^2)\hat{x}_2 = (\Gamma_1^1 - i\Gamma_2^1)\hat{x}_1 + (\Gamma_1^2 - i\Gamma_2^2)\hat{x}_2 =$$
$$= (\Gamma_1 + i\Gamma_2)\hat{x}.$$

Аналогично проверяется равенство (13) для $\operatorname{Im}\lambda < 0$. □

Выясним теперь, как связаны между собой характеристические функции $C_1(\lambda)$ и $C(\lambda)$ оператора A, соответствующие различным пространствам граничных значений $(X^1, \Gamma_1^1, \Gamma_2^1)$ и $(X^2, \Gamma_1^2, \Gamma_2^2)$.

Пусть U — изометрическое отображение X_2 на X_1. Обозначим через J оператор в $X^1 \oplus X^1$ вида $\begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix}$. Очевидно, что $J = J^* = J^{-1}$.

Теорема 6. *Имеет место соотношение*

$$C_1(\lambda) = [S_{21} + S_{22}UC_2(\lambda)U^{-1}][S_{11} + S_{12}UC_2(\lambda)U^{-1}]^{-1}J^{-1}, \quad (\operatorname{Im}\lambda > 0), \tag{14}$$

где $\begin{pmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{pmatrix}$ — *J-унитарный оператор в* $X^1 \oplus X^1$.

Доказательство. Определим пространство граничных значений $(X^1, \tilde{\Gamma}_1^1, \tilde{\Gamma}_2^1)$ оператора A_1, полагая $\tilde{\Gamma}_1^1 = U\Gamma_1^2$, $\tilde{\Gamma}_2^1 = U\Gamma_2^2$.

Построим в пространстве $X^1 \oplus X^1$ линейный оператор S следующим образом. Пусть $(\varphi', \varphi'') \in X^1 \oplus X^1)$. Существует, и притом единственный, вектор $x \in \mathfrak{N}_\lambda \dot{+} \mathfrak{N}_{\bar{\lambda}}$ такой, что

$$(\tilde{\Gamma}_1^1 + i\tilde{\Gamma}_2^1)x = \varphi', \ (\tilde{\Gamma}_1^1 - i\tilde{\Gamma}_2^1)x = \varphi'' \tag{15}$$

Положим $\psi' = (\Gamma_1^1 + i\Gamma_2^1)x$, $\psi'' = (\Gamma_1^1 - i\Gamma_2^1)x$ и определим оператор S следующим образом:

$$S(\varphi', \varphi'') = (\psi', \psi'') \tag{16}$$

Очевидно, оператор S определен корректно и является сюръективным отображением в $X^1 \oplus X^1$. Кроме того, достаточно просто проверяется J-унитарность оператора S. Так как S ограничен [6], то допускает представление вида

$$S = \begin{pmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{pmatrix},$$

где S_{ij} $(i, j = 1, 2)$ — ограниченные операторы в X^1. Согласно равенству (15)

$$\begin{pmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (\tilde{\Gamma}_1^1 + i\tilde{\Gamma}_2^1)x \\ (\tilde{\Gamma}_1^1 - \tilde{\Gamma}_2^1)x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\Gamma_1^1 + i\Gamma_2^1)x \\ (\Gamma_1^1 - i\Gamma_2^1)x \end{pmatrix},$$

откуда

$$S_{11}(\tilde{\Gamma}_1^1 + i\tilde{\Gamma}_2^1) + S_{12}(\tilde{\Gamma}_1^1 - i\tilde{\Gamma}_2^1) = \Gamma_1^1 + i\Gamma_2^1 \tag{17}$$

$$S_{21}(\tilde{\Gamma}_1^1 + \tilde{\Gamma}_2^1) + S_{22}(\tilde{\Gamma}_1^1 - i\tilde{\Gamma}_2^1) = \Gamma_1^1 - i\Gamma_2^1 \tag{18}$$

Пусть $\tilde{C}(\lambda)$ — характеристическая функция оператора A, соответствующая ПГЗ $(X^1, \tilde{\Gamma}_1^1, \tilde{\Gamma}_2^1)$. Тогда для всех $y \in L_{A_\lambda}$

$$(\tilde{\Gamma}_1^1 - i\tilde{\Gamma}_2^1)y = \tilde{C}_1(\lambda)(\tilde{\Gamma}_1^1 + i\tilde{\Gamma}_2^1)y,$$

и равенство (16) дает

$$(\Gamma_1^1 + i\Gamma_2^1)y = [S_{11} + S_{12}\tilde{C}_1(\lambda)](\tilde{\Gamma}_1^1 + \tilde{\Gamma}_2^1)y. \tag{19}$$

Проведя аналогичные выкладки, получим

$$(\Gamma_1^1 - i\Gamma_2^1)y = [S_{21} + S_{22}\tilde{C}_1(\lambda)](\tilde{\Gamma}_1^1 + i\tilde{\Gamma}_2^1)y. \tag{20}$$

По теореме М. Г. Крейна — Ю. Л. Шмульяна [6] из J-унитарности оператора S следует, что при каждом λ оператор $S_{11}+S_{12}\tilde{C}_1(\lambda)$ непрерывно обратим. Тогда из (19) и (20) следует, что

$$(\tilde{\Gamma}_1^1 + i\tilde{\Gamma}_2^1)y = [S_{11} + S_{12}\tilde{C}_1(\lambda)]^{-1}(\Gamma_1^1 + i\Gamma_2^1)y.$$

Подставляя полученное выражение в (20), получим

$$(\Gamma_1^1 - i\Gamma_2^1)y = [S_{21} + S_{22}\tilde{C}_1(\lambda)][S_{11} + S_{12}\tilde{C}_1(\lambda)]^{-1}(\Gamma_1^1 + i\Gamma_2^1)y. \tag{21}$$

С другой стороны,

$$(\Gamma_1^1 - i\Gamma_2^1)y = C_1(\lambda)(\Gamma_1^1 + i\Gamma_2^1)y \tag{22}$$

Сравнивая равенства (21) и (22), приходим к выводу, что

$$C_1(\lambda) = [S_{21} + S_{22}\tilde{C}_1(\lambda)][S_{11} + S_{12}\tilde{C}_1(\lambda)]^{-1},$$

откуда, с учетом очевидного равенства $\tilde{C}_1(\lambda) = UC_2(\lambda)U^{-1}$, имеем отношение (14). □

Характеристические функции унитарно эквивалентных операторов

Теорема 7. *Характеристические функции унитарно эквивалентных эрмитовых операторов совпадают при соответствующем выборе пространств граничных значений.*

Доказательство. Пусть A_1, A_2 — эрмитовы операторы, действующие в сепарабельных гильбертовых пространствах H_1, H_2 соответственно; оператор $U \in [H_1, H_2]$ такой, что $UA_1U^{-1} = A_2$. Очевидно, что дефектные подпространства $\mathfrak{N}_\lambda^1$ и $\mathfrak{N}_\lambda^2$ операторов A_1 и A_2 соответственно связаны соотношением

$$U\mathfrak{N}_\lambda^1 = \mathfrak{N}_\lambda^2.$$

Пусть $(X, \Gamma_1^1, \Gamma_2^1)$ — произвольное пространство граничных значений оператора A. Нетрудно показать, что тройка $(X, \Gamma_1^2, \Gamma_1^2)$, где $\Gamma_i^2 = \Gamma_i^1 U^{-1}$ $(i = 1, 2)$, является пространством граничных значений оператора A_2. Тогда из соотношения

$$(\Gamma_1^2 - i\Gamma_2^2)x_2 = C_2(\lambda)(\Gamma_1^2 + i\Gamma_2^2)x_2 \quad (x_2 \in L_{A_\lambda^2},\ \mathrm{Im}\,\lambda > 0)$$

следует

$$(\Gamma_1^1 - i\Gamma_2^1)U^{-1}x_2 = C_2(\lambda)(\Gamma_1^1 + i\Gamma_2^1)U^{-1}x_2,$$

где $U^{-1}x_2 = x_1 \in L_{A^1_\lambda}$. Согласно определению характеристической функции, последнее равенство означает, что

$$C_1(\lambda) \equiv C_2(\lambda) \quad (\operatorname{Im}\lambda > 0).$$

Аналогично устанавливается равенство характеристических функций в нижней полуплоскости. □

Для простых эрмитовых операторов [4] имеет место в некотором смысле обратное утверждение.

Теорема 8. *Пусть для простых эрмитовых операторов A_1 и A_2 существуют такие пространства граничных значений $(X, \Gamma_1^1, \Gamma_2^1)$ и $(X, \Gamma_1^2, \Gamma_2^2)$, что соответствующие характеристические функции совпадают: $C_1(\lambda) \equiv C_2(\lambda)$. Тогда данные операторы унитарно эквивалентны.*

Доказательство. Обозначим через Γ_{A_k} график оператора A_k, $(k = 1, 2)$. Тогда область определения D_k^* сопряженного линейного отношения $\Gamma_{A_k}^*$ имеет следующую структуру:

$$D_k^* = D(A_k) + (\mathfrak{N}_{\lambda_0}^k \dot{+} \mathfrak{N}_{\bar{\lambda}_0}^k),$$

где λ_0 — фиксированное невещественное число. В дальнейшем, не ограничивая общности, считаем $\lambda_0 = -i$.

Обозначим через π_k естественный гомоморфизм D_k^* на $D_k^*/D(A_k) : \pi_k(x) = [x]$. Пусть $\pi_k(\mathfrak{N}_\lambda^k) = \hat{\mathfrak{N}}_\lambda^k$. Построим отображение $\hat{\chi}_{\bar{\lambda}}$, действующее из $\hat{\mathfrak{N}}_{\bar{\lambda}}^1$ в $\hat{\mathfrak{N}}_{\bar{\lambda}}^2$ следующим образом. Пусть $[y_1] \in \hat{\mathfrak{N}}_{\bar{\lambda}}^1$, $y_1 = y_0^1 = y_{\bar{\lambda}}^1$, где $y_0^1 \in D(A_1)$, $y_{\bar{\lambda}}^1 \in \mathfrak{N}_{\bar{\lambda}}^1$. В этом случае $y \in D(A_\lambda^1)$ и допускает единственное разложение $y_1 = y_0^1 + y_{-i}^1 + y_i^1$. Положим

$$y' = (\Gamma_1^1 + i\Gamma_2^1)(y_{-i}^1 + y_i^1), \ y'' = (\Gamma_1^1 - i\Gamma_2^1)(y_{-i}^1 + y_i^1). \tag{23}$$

Для пары $(y', y'') \in X \oplus X$ существует и притом единственный вектор $y_2 = y_{-i}^2 + y_i^2 \in \mathfrak{N}_{-i}^2 \dot{+} \mathfrak{N}_i^2$ такой, что

$$(\Gamma_1^2 + i\Gamma_2^2)(y_{-i}^2 + y_i^2) = y', (\Gamma_1^2 - i\Gamma_2^2)(y_{-i}^2 + y_i^2) = y''. \tag{24}$$

Очевидно, $y_2 \in D_2^*$. Полагаем

$$\hat{\chi}_{\bar{\lambda}}[y_1] = [y_2]. \tag{25}$$

Покажем, что $[y_2] \in \hat{\mathfrak{N}}_{\bar{\lambda}}^2$. Пусть, например, $\operatorname{Im}\lambda > 0$ (для $\operatorname{Im}\lambda < 0$ доказательство аналогичное).Из определения $\hat{\chi}_{\bar{\lambda}}$ (25) следует, что

$$(\Gamma_1^2 - i\Gamma_2^2)y_2 = (\Gamma_1^1 - i\Gamma_2^1)(y_{-i}^1 + y_i^1) = C_1(\lambda)(\Gamma_1^1 + i\Gamma_2^1)(y_{-i}^1 + y_i^1) = C_1(\lambda)(\Gamma_1^2 + i\Gamma_2^2)y_2.$$

Так как $C_1(\lambda) = C_2(\lambda)$, то $(\Gamma_1^2 - i\Gamma_2^2)y_2 = C_2(\lambda)(\Gamma_1^2 + i\Gamma_2^2)y_2$, и, следовательно, $y \in L_{A_\lambda^2} \subset D(A_2) \dot{+} \mathfrak{N}_{\bar{\lambda}}^2$, т.е. $[y_2] \in \hat{\mathfrak{N}}_{\bar{\lambda}}^2$. Таким образом, $\hat{\chi}_{\bar{\lambda}} : \hat{\mathfrak{N}}_{\bar{\lambda}}^1 \to \hat{\mathfrak{N}}_{\bar{\lambda}}^2$.

При любом λ $(\operatorname{Im}\lambda \neq 0)$ отображение $\hat{\chi}_{\bar{\lambda}}$ индуцирует отображение $\chi_{\bar{\lambda}} : \mathfrak{N}^1_{\bar{\lambda}} \to \mathfrak{N}^2_{\bar{\lambda}}$ следующим образом. Пусть $x^1_{\bar{\lambda}} \in \mathfrak{N}^1_{\bar{\lambda}}$, $x^1_{\bar{\lambda}} \in [x^1_{\bar{\lambda}}] \in \hat{\mathfrak{N}}^1_{\bar{\lambda}}$. $\hat{\chi}_{\bar{\lambda}}[x^1_{\bar{\lambda}}] = [x^2_{\bar{\lambda}}]$, где $[x^2_{\bar{\lambda}}] \in \hat{\mathfrak{N}}^2_{\bar{\lambda}}$. Таким образом, не ограничивая общности, можно считать, что $x^2_{\bar{\lambda}} \in \mathfrak{N}^2_{\bar{\lambda}}$. Причем, такой вектор в $\mathfrak{N}^2_{\bar{\lambda}}$ единственный. Действительно, если $\tilde{x}^2_{\bar{\lambda}} \in \mathfrak{N}^2_{\bar{\lambda}} \cap [x^2_{\bar{\lambda}}]$, то $\tilde{x}^2_{\bar{\lambda}} - x^2_{\bar{\lambda}} \in D(A_2)$, но $D(A_2) \cap \mathfrak{N}^2_{\bar{\lambda}} = 0$, и поэтому $x^2_{\bar{\lambda}} = \tilde{x}^2_{\bar{\lambda}}$. Положим $\chi_{\bar{\lambda}} x^1_{\bar{\lambda}} = x^2_{\bar{\lambda}}$. Очевидно, $\chi_{\bar{\lambda}}$ — линейное и сюръективное отображение. Покажем, что $\chi_{\pm i}$ изометрично.

В самом деле, например, для любого $x^1_{-i} \in \mathfrak{N}^1_{-i}$

$$\|x^1_{-i}\|^2 = \frac{1}{2i}[(\Gamma^1_1 x^1_{-i}, \Gamma^1_2 x^1_{-i}) - (\Gamma^1_2 x^1_{-i}, \Gamma^1_1 x^1_{-i})] = -\frac{1}{4}[\|(\Gamma^1_1 - i\Gamma^1_2)x^1_{-i}\|^2 -$$

$$- \|(\Gamma^1_1 + i\Gamma^1_2)x^1_{-i}\|^2] = -\frac{1}{4}[\|(\Gamma^2_1 - \Gamma^2_2)\chi_{-i}x^1_{-i}\|^2 - \|(\Gamma^2_1 + i\Gamma^2_2)\chi_{-i}x^1_{-i}\|^2] =$$

$$= \frac{1}{2i}((\Gamma^2_1\chi_{-i}x^1_{-i}, \Gamma^2_2\chi_{-i}x^1_{-i}) - (\Gamma^2_2\chi_{-i}x^1_{-i}, \Gamma^2_1\chi_{-i}x^1_{-i})) = \|\chi_{-i}x^1_{-i}\|^2.$$

Аналогичные выкладки можно провести для оператора χ_i. Таким образом, изометричность операторов $\chi_{\pm i}$ доказана.

Далее, пусть

$$[y_1] \in \hat{\mathfrak{N}}^1_{\bar{\lambda}}, \quad [y_2] = \chi_{\bar{\lambda}}[y_1], \quad y_1 = y^1_0 + y^1_{-i} + y^1_i.$$

Обозначим

$$(\Gamma^1_1 + i\Gamma^1_2)y^1_{-i} = z' \tag{26}$$

$$(\Gamma^1_1 + i\Gamma^1_2)y^1_i = w' \tag{27}$$

Для пары (z', z'') существует вектор $f \in \mathfrak{N}^2_{-i} \dot{+} \mathfrak{N}^2_i$ такой, что

$$(\Gamma^2_1 + i\Gamma^2_2)f = z', \quad (\Gamma^2_1 - i\Gamma^2_2)f = z''.$$

Для пары (w', w'') в свою очередь существует вектор $g \in \mathfrak{N}^2_{-i} \dot{+} \mathfrak{N}^2_i$, для которого

$$(\Gamma^2_1 + i\Gamma^2_2)g = w', \quad (\Gamma^2_1 - i\Gamma^2_1 - i\Gamma^2_2)g = w''.$$

Так как $[y^1_{-i}] \in \hat{\mathfrak{N}}^1_{-i}$, $[y^1_i] \in \hat{\mathfrak{N}}^1_i$, то, согласно определению (25),

$$[f] = \hat{\chi}_{-i}[y^1_{-i}], \quad [g] = \hat{\chi}_i[y^1_i],$$

причем $[f] \in \hat{\mathfrak{N}}^2_{-i}$, $[g] \in \hat{\mathfrak{N}}^2_i$, т.е. $f = f_0 + f^2_{-i}$, $g = g_0 + g^2_i$, где $\{f_0, g_0\} \subset D(A_2)$, $f^2_{-i} \in \mathfrak{N}^2_{-i}$, $g^2_i \in \mathfrak{N}^2_i$.

Сравнивая равенства (26) и (23), приходим к выводу, что

$$z' + w' = y', \quad z'' + w'' = y'',$$

и, следовательно, $f + g = y^2_{-i} + y^2_i$. Причем $[f + g] = [y^2_{-i} + y^2_i] \in \hat{\mathfrak{N}}^2_{\bar{\lambda}}$, т.е. $f + g \in D(A^2_{\bar{\lambda}})$. Тогда из равенства

$$(f_0 + g_0) + (f^2_{-i} - y^2_{-i}) + (g^2_i - y^2_i) = 0$$

в силу однозначности разложения имеем:

$$f_0 + g_0 = 0, \quad f^2_{-i} = y^2_{-i}, \quad g^2_i = y^2_i.$$

Таким образом, следуя определению отображения χ_λ,

$$\chi_{-i}y^1_{-i} = y^2_{-i}, \quad \chi_i y^1_i = y^2_i.$$

Если $C^1_0(\lambda), C^2_0(\lambda)$ — характеристические функции Штрауса для операторов A_1 и A_2 соответственно, то, по определению,

$$C^k_0(\lambda) : \mathfrak{N}^k_{-i} - \mathfrak{N}^k_i \qquad (k = 1, 2),$$

и если $y_1 \in \mathfrak{N}^1_\lambda$, то

$$y^1_i = C^1_0(\lambda)y^1_{-i}; \quad y^2_i = C^2_0(\lambda)y^2_{-i}.$$

Следовательно,

$$\chi_i y^1_i = C^2_0(\lambda)\chi_{-i}y^1-i \quad \text{или} \quad y^1_i = \chi^{-1}_i C^2_0(\lambda)\chi_{-i}y^1_{-i}.$$

Полученное равенство означает, что

$$C^1_0(\lambda) = \chi^{-1}_i C^2_0(\lambda)\chi_{-i},$$

причем χ_i, χ_{-i} — изометрические операторы, не зависящие от λ. Непосредственно из результатов А.В.Штрауса [4] следует унитарная эквивалентность простых эрмитовых операторов A_1, A_2.

□

Список литературы

1. Кужель А.В. *Расширения эрмитовых операторов* // Киев:Выща школа. — 1989. —56 с.
2. Кочубей А.Н. *О характеристических функциях симметрических операторов и их расширений* //Изв.АН АрмССР.Математика. —1980. — XV,N3. —С.219-232.
3. Кужель А.В., Карпенко И.И. *Пространства граничных значений эрмитовых операторов* //Симферопольский ун-т. — 1989. — 8 с. — Деп. в УкрНИИНТИ 14.03.1989,N766-УК89.
4. Штраус А.В. *К теории эрмитовых операторов*//ДАН СССР. — 1949. — 67,N4. — С.611-614.
5. Штраус А.В. *О расширениях и характеристической функции симметрического оператора* //Изв.АН СССР. Сер.математика.—1968. —32,N 1. —С.186-207.
6. Крейн М.Г., Шмульян Ю.Л. *О дробно-линейных преобразованиях с операторными коэффициентами*//Матем.иссл. — 1967. — 2, N3. — С.64-96.