Ученые записки Таврического национального университета им. В. И. Вернадского

Серия "МАТЕМАТИКА" № 1 (2001) 43 – 49

УДК 517.432+517.515

ОБОБЩЕННЫЕ РЕШЕНИЯ СПЕКТРАЛЬНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ ТЕОРИИ МЕЛКОЙ ВОДЫ

Иванов Ю. Б.

Исходная краевая задача для дифференциальных уравнений. Систему дифференциальных уравнений, описывающую распространение длинных гравитационных волн во вращающемся бассейне переменной глубины, следуя работе [1], запишем в виде

$$\begin{aligned} u_t - f \cdot v &= -g \cdot \xi_x \\ v_t + f \cdot u &= -g \cdot \xi_y \\ \xi_t + (Hu)_x + (Hv)_y &= 0, \end{aligned} \tag{1}$$

где $\xi(x, y, t)$ – возвышение свободной поверхности, $u(x, y, t), v(x, y, t)$ — горизонтальные составляющие скорости частиц жидкости, $H(x, y)$ — глубина бассейна; константы $f = 2\Omega \sin \varphi_0$ — параметр Кориолиса, g — ускорение свободного падения.

В случае замкнутого бассейна, занимающего область G на плоскости (x, y), решения системы (1) должны удовлетворять граничному условию

$$H(u \cdot \nu_x + v \cdot \nu_y) = 0, \tag{2}$$

где $\vec{n} = (\nu_x, \nu_y)$ — внешняя нормаль к границе Γ области G, занимаемой бассейном, и условию сохранения объема жидкости

$$\iint\limits_G \xi(x, y) dG = 0. \tag{3}$$

Нас будут интересовать только периодические решения задачи (1), то есть решения вида $\xi(x, y, t) = \xi(x, y) \cdot e^{-i\omega t}$. В этом случае задача о свободных колебаниях жидкости в бассейне сводится к спектральной краевой задаче только для функции $\xi(x, y)$, определяющей форму свободной поверхности жидкости.

Пусть $\xi(x, y) = \xi_1(x, y) + i\xi_2(x, y)$. Тогда для вещественных функций $\xi_1(x, y), \xi_2(x, y)$ приходим к следующей системе дифференциальных уравнений второго порядка

$$\begin{aligned} &\lambda\left(\frac{\partial}{\partial x}H\frac{\partial\xi_1}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial y}H\frac{\partial\xi_1}{\partial y}\right)+\alpha\left(\frac{\partial}{\partial x}H\frac{\partial\xi_2}{\partial y}-\frac{\partial}{\partial y}H\frac{\partial\xi_2}{\partial x}\right)+\lambda(\lambda^2-\alpha^2)\xi_1=0\\ &\lambda\left(\frac{\partial}{\partial x}H\frac{\partial\xi_2}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial y}H\frac{\partial\xi_2}{\partial y}\right)-\alpha\left(\frac{\partial}{\partial x}H\frac{\partial\xi_1}{\partial y}-\frac{\partial}{\partial y}H\frac{\partial\xi_1}{\partial x}\right)+\lambda(\lambda^2-\alpha^2)\xi_2=0 \end{aligned}\tag{4}$$

с граничными условиями

$$\begin{aligned} &-H\left[\lambda\left(\frac{\partial\xi_1}{\partial x}\nu_1+\frac{\partial\xi_1}{\partial y}\nu_2\right)+\alpha\left(\frac{\partial\xi_2}{\partial y}\nu_1-\frac{\partial\xi_2}{\partial x}\nu_2\right)\right]=0\\ &-H\left[\lambda\left(\frac{\partial\xi_2}{\partial x}\nu_1+\frac{\partial\xi_2}{\partial y}\nu_2\right)-\alpha\left(\frac{\partial\xi_1}{\partial y}\nu_1-\frac{\partial\xi_1}{\partial x}\nu_2\right)\right]=0 \end{aligned}\tag{5}$$

где $\alpha=\frac{fl_0}{\sqrt{gH_0}}$ — безразмерный коэффициент Кориолиса, $\lambda=\frac{\omega l_0}{\sqrt{gH_0}}$ — безразмерная частота, все остальные величины в уравнениях (4) и (5) также безразмерны.

Решения краевой задачи (4) и (5) должны удовлетворять условиям

$$\iint\limits_G \xi_1(x,y)dG=0,\qquad \iint\limits_G \xi_2(x,y)dG=0,\tag{6}$$

следующим из условия сохранения объема жидкости (3).

Расширение оператора $\mathbb{L}+\alpha^2\mathbb{E}$. . Пусть в гильбертовом пространстве $L_2(G)$ действует оператор A_0:

$$A_0u=-\left(\frac{\partial}{\partial x}H(x,y)\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial y}H(x,y)\frac{\partial u}{\partial y}\right)+\alpha^2u,\quad \alpha>0,\quad (x,y)\in G\setminus\Gamma$$

определенный на плотном в $L_2(G)$ линейном множестве

$$E_0=\left\{u\in C^2(\overline{G}),\quad H\frac{\partial u}{\partial\vec{n}}=0\quad \text{на } \Gamma,\quad 0<c\le H(x,y)\le C\right\}.$$

Лемма 1. *Оператор A_0 на множестве E_0 является симметричным и положительно определенным оператором, то есть*

$$(A_0u,v)=(u,A_0v),\quad (A_0u,u)\ge\alpha^2(u,u).$$

Доказательство. Применяя формулы интегрирования по частям к скалярному произведению (A_0u,v) и, учитывая граничное условие $H\cdot\partial u/\partial\vec{n}=0$, получаем

$$(A_0u,v)=\int\limits_G H\left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y}\right)+\alpha^2uv\,dG=(u,A_0v).$$

Полагая $u=v$, приходим к требуемому неравенству

$$(A_0u,u)=\int\limits_G H\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right]+\alpha^2u^2\,dG\ge\alpha^2(u,u).$$

Лемма доказана.

Лемма 2. *Симметрический оператор A_0 может быть расширен до самосопряженного положительно определенного оператора A, обладающего следующими свойствам:*

$A : D(A) \to L_2(G)$, с областью определения $D(A) \subset H^1(G)$, плотной в $H^1(G)$; $(Au, u) \geq \alpha^2 (u, u)$;

$A^{1/2} : H^1(G) \to L_2(G)$, оператор $A^{1/2}$ - самосопряжен, непрерывен, положительно определен.

Доказательство. На линейном множестве E_0 введем новое скалярное произведение и соответствующую норму

$$(u, v)_F = (A_0 u, v), \quad ||u||_F^2 = (u, u)_F.$$

Пополним пространство E_0 по норме $||\cdot||_F$. Применяя метод Фридрихса [2] расширения полуограниченных симметричных операторов, приходим к самосопряженному оператору A, обладающему требуемыми свойствами.

Лемма доказана.

Лемма 3. *Если граница Γ области G непрерывна по Липшицу, коэффициент $H(x, y)$ непрерывно дифференцируем и $0 < c \leq H(x, y) \leq C$, то*

$A^{-1} : L_2(G) \to H^1(G)$ - самосопряжен, положителен и компактен как оператор из $L_2(G)$ в $L_2(G)$;

$A^{-1/2} : L_2(G) \to H^1(G)$ - самосопряжен, положителен и компактен как оператор из $L_2(G)$ в $L_2(G)$.

Доказательство. Рассмотрим гильбертову пару $\left(W_2^1(G); L_2(G)\right)$, где $W_2^1(G)$ - пространство Соболева со стандартной нормой и соответствующим скалярным произведением. Так как граница Γ области G непрерывна по Липшицу, то, как известно [3], пространство $W_2^1(G)$ вложено в $L_2(G)$ компактно, $W_2^1(G) \overset{C}{\subset\!\!\longrightarrow} L_2(G)$. В силу условия (3) и на основании равенства Пуанкаре, имеем, что

$$||u||_{W_2^1(G)} \sim ||u||_{H^1(G)} \equiv \left(\int\limits_G |\nabla u|^2 \, dG \right)^{1/2}$$

Тогда пространство $H^1(G)$ компактно вложено в пространство $L_2(G)$. Для коэффициента $H(x, y)$, удовлетворяющего условиям леммы, имеем очевидную эквивалентность норм, $||u||_{H^1(G)} \sim ||u||_F$. Следовательно, $F \overset{C}{\subset\!\!\longrightarrow} L_2(G)$. В силу эквивалентности норм пространства $H^1(G)$ и F отождествимы, а оператор A, порождающий гильбертову пару $(F; L_2(G))$, обладает требуемыми свойствами, указанными при формулировке леммы, при этом пространства F и $H^1(G)$ взаимозаменяемы.

Лемма доказана.

В дальнейшем, чтобы явно указывать зависимость оператора A от параметра α, оператор A будем обозначать $A \equiv L + \alpha^2 E$, всегда рассматривая выражение в правой части этой формулы как единый оператор.

Рассмотрим теперь гильбертову пару $(\mathbb{H}^1(G); \mathbb{L}_2(G))$ векторных гильбертовых пространств. Порождающим оператором этой пары является матрица операторов

$$\mathbb{A} \equiv \mathbb{L} + \alpha^2\mathbb{E} = \begin{pmatrix} L + \alpha^2 E & 0 \\ 0 & L + \alpha^2 E \end{pmatrix}$$

и для $\mathbb{A}$ справедливы все свойства оператора A, указанные ранее:

$\left((\mathbb{L} + \alpha^2\mathbb{E})\, u, v\right)_{\mathbb{L}_2(G)} = (u, v)_{\mathbb{F}}, \quad u \in D(\mathbb{L} + \alpha^2\mathbb{E}), \quad v \in \mathbb{H}^1(G);$

$\mathbb{L}+\alpha^2\mathbb{E} : D(\mathbb{L}+\alpha^2\mathbb{E}) \to \mathbb{L}_2(G)$; оператор $\mathbb{L}+\alpha^2\mathbb{E}$ – самосопряжен, положительно определен;

$(\mathbb{L} + \alpha^2\mathbb{E})^{1/2} : \mathbb{H}^1(G) \to \mathbb{L}_2(G)$, оператор $(\mathbb{L} + \alpha^2\mathbb{E})^{1/2}$ – самосопряжен, непрерывен, положительно определен;

$(\mathbb{L} + \alpha^2\mathbb{E})^{-1} : \mathbb{L}_2(G) \to \mathbb{H}^1(G)$, оператор $(\mathbb{L} + \alpha^2\mathbb{E})^{-1}$ – самосопряжен, положителен, компактен как оператор из $\mathbb{L}_2(G)$ в $\mathbb{L}_2(G)$;

$(\mathbb{L} + \alpha^2\mathbb{E})^{-1/2} : \mathbb{L}_2(G) \to \mathbb{H}^1(G)$, оператор $(\mathbb{L} + \alpha^2\mathbb{E})^{-1/2}$ – самосопряжен, положителен, компактен как оператор из $\mathbb{L}_2(G)$ в $\mathbb{L}_2(G)$.

Расширение оператора смешанных производных $\mathbb{M}$. Пусть в гильбертовом пространстве $L_2(G)$ действует оператор M_0

$$M_0 u = \frac{\partial}{\partial x} H(x,y) \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial y} H(x,y) \frac{\partial u}{\partial x}, \quad (x,y) \in G \setminus \Gamma.$$

определенный на плотном в $L_2(G)$ множестве E_1

$$E_1 = \left\{ u \in C^2(\overline{G}), \quad H\frac{\partial u}{\partial \vec{s}} = 0 \text{ на } \Gamma, \quad 0 < c \le H(x,y) \le C, \quad |\nabla H| < C \right\}.$$

Лемма 4. *Оператор M_0 на E_1 является кососимметрическим, то есть для $u, v \in E_1$*

$$(M_0 u, v)_{L_2(G)} = -(u, M_0 v)_{L_2(G)}.$$

Доказательство. К скалярному произведению $(M_0 u, v)_{L_2(G)}$ применим формулы интегрирования по частям и, используя граничное условие $H \cdot \partial u / \partial \vec{s} = 0$ на Γ, получаем равенство

$$(M_0 u, v)_{L_2(G)} = \int\limits_G H \left(\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y} \right) dG \equiv [u,v]_M$$

Следовательно, $[u,v]_M = -[v,u]_M = -(u, M_0 v)_{L_2(G)}$.

Лемма доказана.

Лемма 5. *Если коэффициент $H \in C^1(\overline{G})$ и $|\nabla H| < C$, то оператор M_0 можно продолжить до непрерывного оператора $M : H^1(G) \to L_2(G)$ с сохранением свойства кососимметричности.*

Доказательство. Для дифференцируемого $H(x,y)$ и $u,v \in E_1$ имеем

$$M_0 u = \frac{\partial}{\partial x} H \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial y} H \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial H}{\partial x} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial H}{\partial y} \cdot \frac{\partial u}{\partial x}.$$

Тогда, очевидно, справедливо равенство

$$(M_0 u, M_0 u)_{L_2(G)} = \int\limits_G \left(\frac{\partial H}{\partial x} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial H}{\partial y} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 dG,$$

из которого следует оценка

$$||M_0 u||_{L_2(G)} \le C\, ||u||_{H^1(G)}.$$

Так как E_1 плотно в $H^1(G)$ то оператор M_0 допускает продолжение по непрерывности до ограниченного оператора $M : H^1(G) \to L_2(G)$.

В силу непрерывности билинейной формы $[u,v]_{M_0}$ на $H^1(G)$ свойство кососимметричности для оператора M сохраняется, то есть

$$(Mu, v)_{L_2(G)} = -(u, Mv)_{L_2(G)} =$$

$$= \int\limits_G H \left(\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y} \right) dG \equiv [u,v]_M \quad \text{для}\, u,v \in H^1(G). \tag{7}$$

Лемма доказана.

На паре гильбертовых векторных пространств $\left(\mathbb{H}^1(G); \mathbb{L}_2(G)\right)$ определим оператор

$$\mathbb{M} = \begin{pmatrix} 0 & M \\ -M & 0 \end{pmatrix}.$$

Лемма 6. *Оператор* $\mathbb{M} : \mathbb{H}^1(G) \to \mathbb{L}_2(G)$ *непрерывен и самосопряжен. Имеет место равенство*

$$(\mathbb{M}u, v)_{\mathbb{L}_2(G)} = (u, \mathbb{M}v)_{\mathbb{L}_2(G)} \equiv [u,v]_{\mathbb{M}} \quad \text{для}\, u,v \in \mathbb{H}^1(G).$$

Доказательство. Непрерывность оператора $\mathbb{M}$ непосредственно следует из непрерывности оператора M, доказанной ранее.

Симметричность оператора $\mathbb{M}$ следует из его определения как матрицы с операторными коэффициентами и свойства кососимметричности оператора M.

Самосопряженность оператора $\mathbb{M}$ теперь следует из его симметричности и ограниченности.

В силу определения оператора $\mathbb{M}$ и его самосопряженности, для скалярных произведений имеем равенства:

$$(\mathbb{M}u, v)_{\mathbb{L}_2(G)} = (u, \mathbb{M}v)_{\mathbb{L}_2(G)} \equiv [u,v]_{\mathbb{M}} \quad \text{для}\, u,v \in \mathbb{H}^1(G),$$

где $[u,v]_{\mathbb{M}}$ — симметричная, ограниченная на $\mathbb{H}^1(G)$ билинейная форма.

Лемма доказана.

Лемма 7. *Для операторов* $\mathbb{A} \equiv \mathbb{L} + \alpha^2\mathbb{E}$ *и* $\mathbb{M}$ *справедливо неравенство*

$$\mathbb{L} + \alpha^2\mathbb{E} \ge \mathbb{M} + \alpha^2\mathbb{E} \quad \text{на}\ D(\mathbb{L} + \alpha^2\mathbb{E}) \subset \mathbb{H}^1(G).$$

Доказательство. Докажем что $(\mathbb{A}u, u) \geq (\mathbb{M}u, u) + \alpha^2(u, u)$ для $u \in D(\mathbb{A}) \subset \mathbb{H}^1(G)$. Пусть вектор-функция $u = (u_1, u_2)$, тогда $(\mathbb{A}u, u) = (Au_1, u_1) + (Au_2, u_2)$. В силу леммы 1, имеем

$$(\mathbb{A}u, u) = \int\limits_G H\left[\left(\frac{\partial u_1}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u_1}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u_2}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u_2}{\partial y}\right)^2\right] + \alpha^2(u_1^2 + u_2)^2\, dG$$

Из определения операторов $\mathbb{M}$ и M имеем

$$(\mathbb{M}u, u) = (Mu_2, u_1) - (Mu_1, u_2) = 2\int\limits_G H\left(\frac{\partial u_2}{\partial y}\frac{\partial u_1}{\partial x} - \frac{\partial u_2}{\partial x}\frac{\partial u_1}{\partial y}\right) dxdy$$

В интегральной форме доказываемое неравенство запишется следующим образом

$$\int\limits_G H\left[\left(\frac{\partial u_1}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u_1}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u_2}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u_2}{\partial y}\right)^2\right] + \alpha^2(u_1^2 + u_2)^2\, dxdy \geq$$
$$\geq 2\int\limits_G H\left(\frac{\partial u_2}{\partial y}\frac{\partial u_1}{\partial x} - \frac{\partial u_2}{\partial x}\frac{\partial u_1}{\partial y}\right) + \alpha^2(u_1^2 + u_2)^2\, dxdy. \tag{8}$$

Легко проверить, что последнее неравенство эквивалентно следующему очевидному неравенству

$$\int\limits_G H\left[\left(\frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial u_2}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u_1}{\partial y} - \frac{\partial u_2}{\partial x}\right)^2\right] dxdy \geq 0$$

Доказательство завершено.

Определение обобщенных решений. Целью наших исследований в данной работе является формулировка определения обобщенных решений краевой задачи, соответствующих периодическим решениям исходной системы уравнений (1).

Рассмотрим спектральную задачу для указанного далее полиномиального пучка третьей степени с неограниченными операторными коэффициентами. Операторы, входящие в коэффициенты, представляют собой самосопряженные расширения, имеющие свойства, доказанные в леммах 1–7, соответствующих дифференциальных операторов. Среди решений спектральной задачи рассматриваем только решения, имеющие положительную ориентацию, то есть $(\mathbb{M}\xi, \xi) \geq 0$.

Определение. *Обобщенным решением дифференциальной спектральной задачи будем называть решение (λ, ξ) уравнения*

$$\left(\lambda^3\mathbb{E} - \lambda\left(\mathbb{L} + \alpha^2\mathbb{E}\right) + \alpha\mathbb{M}\right)\xi = 0,$$

обладающее при $\alpha > 0$ следующими свойствами

$$\lambda \in R, \quad \lambda(\lambda^2 - \alpha^2) \neq 0;$$

$$\xi \in D\left(\mathbb{L} + \alpha^2 \mathbb{E}\right) \subset \mathbb{H}^1(G) \overset{C}{\subset\!\longrightarrow} \mathbb{L}_2(G), \quad \xi \neq 0;$$

$$(\mathbb{M}\xi, \xi) \geq 0.$$

Список литературы

1. Черкесов Л.В., Иванов В.А., Хартиев С.Н. *Введение в гидродинамику и теорию волн.* – Санкт-Петербург. Гидрометеоиздат,1992. — 264 с.
2. Рисс Ф., Сёкефальви–Надь Б. *Лекции по функциональному анализу.* М.:Мир, 1979. — 587 с.
3. Копачевский Н.Д., Крейн С.Г., Нго Зуй Кан. *Операторные методы в линейной гидродинамике: эволюционные и спектральные задачи.* М.:Наука, Гл.ред.физ.-мат.лит., 1989. — 416с.