Ученые записки Таврического национального университета им. В. И. Вернадского

Серия "МАТЕМАТИКА" № 1 (2001) 24 – 33

УДК 517.956.

БИФУРКАЦИЯ РОЖДЕНИЯ ПЕРИОДИЧЕСКИХ РЕШЕНИЙ В ПАРАБОЛИЧЕСКОЙ ЗАДАЧЕ С ПРЕОБРАЗОВАННЫМ АРГУМЕНТОМ

Белан Е. П.

Введение. Изучаются автоколебательные режимы в оптическом резонаторе [1], связанные с поворотом поля в контуре обратной связи вокруг оптической оси.

В экспериментах по исследованию ротационной неустойчивости наблюдались многолепестковые вращающиеся структуры (оптические ревербераторы). Изменение угла поворота приводило к изменению скорости и направления вращения структур (при некоторых углах поворота $\Delta = \Delta_m$ структуры оставались неподвижными). Определяющее влияние на развитие пространственно-временной упорядоченности оказывает изменение следующих параметров: интенсивности входного поля, угла поворота поля.

Описание динамики светового поля в таких резонаторах приводит к нелинейным параболическим уравнениям с преобразованным пространственным аргументом.

Для описания автоволновых процессов, протекающих в резонаторе, в [1] - [3] использовалась одномерная по пространству модель. В приближении тонкого кольцевого слоя радиуса r_o, которое учитывает изменение светового поля только по углу θ. для описания фазы световой волны использовались уравнения

$$\partial u(\theta,t)/\partial t + u(\theta,t) = D\partial^2 u(\theta,t)/\partial\theta^2 + K(1+\gamma\cos u(\theta+\Delta,t), \qquad (1)$$

$$u(\theta,t) = u(\theta+2\pi,t), \quad \partial u(\theta,t)/\partial\theta = \partial u(\theta+2\pi,t)/\partial\theta, \qquad (2)$$

$$u(\theta,0) = u_0(\theta). \qquad (3)$$

Здесь $D = dr_0^{-2}$, $d > 0$ – коэффициент диффузии частиц нелинейной среды, $0 < \gamma \le 1$ – видность интерференционной картины, $K > 0$ – коэффициент пропорциональный интенсивности светового потока, Δ – угол поворота поля в контуре обратной связи.

В работах [1] – [3] возникновение пространственно-неоднородных вращающихся структур связывалось с потерей устойчивости стационарного пространственно-однородного режима. На этом пути в [1] – [2] найдены формулы для пространственного периода и временной частоты пространственно-неоднородных вращающихся структур типа многолепестковых волн, хорошо согласующихся с экспериментом в малой окрестности стационара.

В статье [3] доказаны теоремы существования и единственности рождающегося из стационарного состояния периодического решения типа бегущей волны, получено разложения этого решения по степеням малого параметра. В работе [4] проведен анализ устойчивости построенных в [3] периодических решений. Эти результаты распространены на случай круга в [5].

Бифуркация рождения периодических решений в случае двумерных областей с гладкой границей и гладким обратимым преобразованием пространственной переменной исследована в [6].

В настоящей работе найдены явные выражения для асимптотик рождающихся периодических решений и для величин, определяющих характер бифуркации. Рассмотрен случай критических углов поворота $\Delta = \Delta_m$.

Линеаризация. Обозначим H^l шкалу пространств, порожденных оператором $-d^2/d\theta^2$ при периодических условиях (2). Норма в этих пространствах задается формулой

$$||u||_l =< -d^{2l}u/d\theta^{2l}, u > + < u, u > .$$

Заметим, что $H^l \subset H^l[0, 2\pi]$, где $H^l[0, 2\pi]$ пространство Соболева со скалярным произведением

$$< u, v >_l= \sum_{0\le\alpha\le l} \int\limits_0^{2\pi} d^\alpha \overline{u}/d\theta^\alpha d^\alpha v(\theta)/d\theta^\alpha \, d\theta.$$

Следуя [7], нетрудно убедится, что задача (1) – (3) порождает в пространстве H^1 нелинейную аналитическую полугруппу.

Пространственно-однородные стационарные решения задачи (1) - (2) являются решениями уравнения

$$w = K(1 + \gamma \cos w). \tag{4}$$

Решения этого уравнения рассмотрим при фиксированном γ.

УСЛОВИЕ 1. Уравнение (4) *при* $K = \hat{K}$ *имеет такое решение* $w = \hat{w}$, *что*

$$1 + \hat{K}\gamma \sin \hat{w} \neq 0.$$

Тогда, согласно [3], в некоторой окрестности точки $\mu = 0$ существует аналитическая функция $w = w(\mu)$, $w(0) = \hat{w}$, удовлетворяющая уравнению (4) при $K = \hat{K} + \mu$.

Справедливо следующее равенство

$$w'(0) = (1 + \gamma \cos \hat{w})/(1 + \hat{K}\gamma \sin \hat{w}).$$

Исследование решений задачи (1) – (2) в окрестности $w(\mu)$ преобразованием $u = w + v$ сводится к аналогичной проблеме для нулевого решения в рассматриваемом в пространстве H^1 уравнении

$$\dot{v} = \mathfrak{L}(\mu)v + \mathfrak{R}(v, \mu), \tag{5}$$

где
$$\mathfrak{L}(\mu)v = Dv'' - v - (\hat{K}+\mu)\gamma\sin w(\mu)v_\Delta,$$
$$\mathfrak{R}(v,\mu) = (\hat{K}+\mu)\gamma[\cos(w(\mu)+v_\Delta) - \cos w(\mu) + v_\Delta \sin w(\mu)].$$
Здесь введено обозначение $v_\Delta(\theta) = v(\theta+\Delta)$.

Пусть выполнено условие 1. Тогда отображения
$$(v,\mu) \to \mathfrak{L}(\mu)v : H^2 \cap H^1 \times \mathbb{R} \to H, \quad (v,\mu) \to \mathfrak{R}(v,\mu) : H^1 \times \mathbb{R} \to H^1$$
являются аналитическими в некоторой окрестности точки $(0,0)$. Обозначим
$$\Lambda = -\hat{K}\gamma\sin\hat{w}, \quad l_1 = -\gamma(\sin\hat{w} + \hat{K}w'(0)\cos\hat{w}).$$
Следующий результат получен в [3].

Лемма 1. *Оператор $\mathfrak{L}(\mu) : H^2 \to H$ имеет полную ортонормированную в H систему собственных функций $q_k = \exp(ik\theta)$, отвечающих собственным значениям*
$$\lambda_k(\mu) = \delta_k(\mu) + i\omega_k(\mu), \quad k = 0, \pm 1, \ldots, \tag{6}$$
где
$$\delta_k(\mu) = -Dk^2 - 1 - (\hat{K}+\mu)\gamma\sin w(\mu)\cos(k\Delta),\ \omega_k(\mu) = -(\hat{K}+\mu)\gamma\sin w(\mu)\sin(k\Delta).$$

Для исследования рождающихся из стационарного состояния устойчивых периодических решений предположим, что выполнено условие:

УСЛОВИЕ 2. Справедливо неравенство $\delta_k(0) \le 0, k = 0, \pm 1, \ldots$. При $\mu = 0$ среди собственных значений (6) имеется ровно одна пара собственных значений с номерами $k = \pm m$, для которой
$$\delta_{\pm m}(0) = 0, \qquad \delta'_m(0) = l_1 \cos m\Delta \ne 0.$$
Из условия 2 следует, что $\Lambda < -1$, $\sin\hat{w} > 0$, $\cos m\Delta < 0$.

Центральные многообразия. Оператор $-\mathfrak{L}(0)$ в пространстве H с областью определения $\mathfrak{D}(-\mathfrak{L}(0)) = H^2$ является секториальным оператором [7].

Уравнение (5) инвариантно относительно группы вращения $\theta \to \theta + \alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

Обозначим $\mathfrak{N}_m = \mathrm{Span}(q_m, q_{-m})$. Зафиксируем натуральное $s \ge 3$. Согласно [7], [8], [9] семейство уравнений (5) имеет в пространстве $H^1 \times (-\mu_0, \mu_0)$ C^s гладкое экспоненциально устойчивое центральное многообразие $\mathfrak{M}$, касательное к $\mathfrak{N}_m \times \mathbb{R}$ в нуле и инвариантное относительно группы вращения. Ограничение (5) на $\mathfrak{M}$ приводит к системе уравнений на плоскости, которая инвариантна относительно группы вращения. Выбрав в качестве карты на многообразии $\mathfrak{M}$ z, μ и используя инвариантность $\mathfrak{M}$ относительно группы вращения, приходим к заключению, что справедливо равенство
$$\mathfrak{M} = \{v, \mu : v = ze^{im\theta} + \bar{z}e^{-im\theta} + \sigma(ze^{im\theta}, \bar{z}e^{-im\theta}, \mu)\}, \tag{7}$$
где $\sigma(\xi, \bar{\xi}, \mu) = O(|\xi|^2)$. Функция, определяющая $\mathfrak{M}$, инвариантна относительно группы преобразований
$$\theta \to \theta + \alpha,\ z \to e^{-imz\alpha},\ \bar{z} \to e^{imz\alpha},\ \alpha \in \mathbb{R}.$$

На $\mathfrak{M}$ уравнение (5) можно представить в виде

$$\dot{z} = z(\lambda_m(\mu) + g(z\overline{z}, \mu)), \tag{8}$$

где $g(|z|^2, \mu) = O(|z|^2)$. Второе уравнение системы получается операцией сопряжения.

Покажем,что многообразие $\mathfrak{M}$ можно вычислить в том смысле, что для σ можно построить асимптотически сходящиеся в нуле ряды по $(\xi, \overline{\xi}, \mu)$. С этой целью введем ряд определений.

На пространстве формальных степенных рядов относительно ξ, $\overline{\xi}$ определим линейные операторы A, Q согласно равенств

$$A\xi^k\overline{\xi}^s = \lambda_{(k-s)m}\xi^k\overline{\xi}^s, \quad Q\xi^k\overline{\xi}^s = e^{i(k-s)m\Delta}\xi^k\overline{\xi}^s, \quad k \geq 0,\, s \geq 0.$$

Обозначим

$$B = (\lambda_m\xi\frac{\partial}{\partial\xi} + \overline{\lambda_m\xi}\frac{\partial}{\partial\overline{\xi}} - A).$$

Линейный оператор B действует из пространства многочленов в себя. Он оставляет инвариантными пространства однородных многочленов любой степени и является на каждом из них диагональным :

$$B\xi^k\overline{\xi}^s = (k\lambda_m + s\overline{\lambda_m} - \lambda_{(k-s)m})\xi^k\overline{\xi}^s.$$

Из условия 2 следует, что собственные значения оператора B при $\mu = 0$ равны нулю тогда и только тогда, когда $k - s = \pm 1$.

Мономы $\xi^{k+1}\overline{\xi}^k$, $\xi^k\overline{\xi}^{k+1}$ будем называть резонансными мономами. Однородный многочлен степени $r(r \geq 2)$ назовем безрезонансным, если он не содержит резонансных мономов. Очевидно, что всякий однородный многочлен четной степени является безрезонансным.

Следствие. *Уравнение*

$$Bh = q \tag{9}$$

однозначно разрешимо в классе однородных безрезонансных многочленов h степени $r(r \geq 2)$ для любого однородного безрезонансного многочлена q степени $r(r \geq 2)$.

Если коэффициенты безрезонансного многочлена q являются аналитическим функциями параметра μ в окрестности нуля, то коэффициенты решения h являются аналитическими функциями параметра μ в окрестности нуля.

Обозначим P, $\overline{P}$ — операторы проектирования из пространства формальных степенных рядов в пространство формальных степенных рядов, состоящие из резонансных мономов соответственно вида $\xi^{k+1}\overline{\xi}^k$, $\xi^k\overline{\xi}^{k+1}$. Обозначим

$$R(v, \mu) = (\hat{K} + \mu)\gamma[\cos(w(\mu) + v) - \cos w(\mu) + v \sin w(\mu)].$$

Рассмотрим уравнение

$$B\sigma = (1 - P - \overline{P})R(Q(\xi + \overline{\xi} + \sigma), \mu) - \frac{\partial\sigma}{\partial\xi}f - \frac{\partial\sigma}{\partial\overline{\xi}}\overline{f}, \tag{10}$$

где
$$f = PR(Q(\xi + \overline{\xi} + \sigma), \mu). \tag{11}$$
Пусть q — многочлен. Введем следующие обозначения
$$q_p = J_p q, \qquad q^p = \sum_2^p q_k, \quad p = 2, \dots .$$
Здесь J_p — оператор проектирования на множество однородных многочленов степени p.

Приведем схему последовательного построения безрезонансных многочленов $\sigma_k, k = 2, \dots$, резонансных мономов $f_k, k = 3, \dots$ в разложениях σ, f:
$$\sigma = \sum_2^\infty \sigma_k, \quad f = \sum_3^\infty f_k,$$
формально удовлетворяющих "уравнениям" (10) – (11) в смысле, который будет ясен из дальнейших построений.

1. Находим σ_2 из уравнения
$$B\sigma = J_2 R(Q(\xi + \overline{\xi}), \mu).$$
Полагаем $f_2 = 0$.

2. Предположим, что однородные компоненты σ_j, f_j до порядка $j < p$ найдены. Тогда а) находим σ_p из уравнения вида (9) с известной правой частью
$$B\sigma = J_p((1 - P - \overline{P})R(Q(\xi + \overline{\xi} + \sigma^{p-1}), \mu) - \frac{\partial \sigma^{p-1}}{\partial \xi} f^{p-1} - \frac{\partial \sigma^{p-1}}{\partial \overline{\xi}} \overline{f}^{p-1}).$$
б) вычисляем
$$f_p = J_p PR(Q(\xi + \overline{\xi} + \sigma^{p-1}), \mu).$$
В частности, при $p = 2$ получаем
$$\sigma_2 = \frac{1}{2}\sigma_{2,0}\xi^2 + \sigma_{1,1}\xi\overline{\xi} + \frac{1}{2}\sigma_{0,2}\overline{\xi}^2, \tag{12}$$
где
$$\sigma_{k,s} = [k\lambda_m + s\overline{\lambda}_m - \lambda_{m(k-s)}]^{-1} R_{k,s},$$
$$R_{k,s} = -\cos w K \gamma e^{im(k-s)\Delta}, \quad k + s = 2.$$
При $p = 3$ имеем
$$f_3 = c_1(\mu)\xi^2\overline{\xi}, \tag{13}$$
где
$$c_1(0) = c_1 = e^{im\Delta}\big(-\Lambda/2 + (\hat{K}\gamma\cos\hat{w})^2((1 - \Lambda)^{-1} +$$
$$+ \exp 2im\Delta(2(2i\omega_m(0) + D(2m)^2 + 1 - \Lambda\exp 2im\Delta)^{-1}))\big). \tag{14}$$

Выполненное выше построение σ^p имеет смысл с точки зрения следующего предложения.

Теорема 1. *Пусть функция $\sigma(\xi,\bar\xi,\mu)$ определяет центральное многообразие уравнения* (6) $\mathfrak{M}$ *вида* (7). *Тогда*

$$|\sigma(\xi,\bar\xi,\mu)-\sigma^p(\xi,\bar\xi,\mu)|=o(|\xi|^p),$$

$$|\xi g(|\xi|^2,\mu)-f^p(\xi,\bar\xi,\mu)|=o(|\xi|^p),\quad |\xi|\to 0$$

равномерно по μ в окрестности нуля.

Из (8), (13), теоремы 1 следует равенство

$$g(|z|^2,\mu)=c_1(\mu)|z|^2+O(|z|^4). \tag{15}$$

Согласно равенства (14) и условия 2 имет место неравенство

$$\operatorname{Re}c_1(0)<0.$$

Предположим, что $\delta_m'(0)>0$. Очевидно, что в этом случае при достаточно малых $\mu>0$ система (8) имеет орбитально асимптотически устойчивое периодическое решение

$$z=\rho(\mu)e^{i\omega(\mu)t}, \tag{16}$$

где $\rho=\rho(\mu)$, $\omega(\mu)$ удовлетворяют уравнениям

$$\delta_m(\mu)\rho+\operatorname{Re}g(\rho^2,\mu)\rho=0,\qquad \omega(\mu)=\omega_m(\mu)+\operatorname{Im}g(\rho^2,\mu). \tag{17}$$

Периодическое решение (16) является единственным периодическим решением (8) в окрестности $(0,0)$.

Существование и единственность периодических решений. Из теоремы сведения [7], [8], [11], равенств (7), (12), (14), (16), (17), следует теорема.

Теорема 2. *Пусть выполнены условия 1, 2. Предположим, что $\omega_m(0)\neq 0$, $\delta_m'(0)>0$. Тогда существует такое $\mu_0>0$, что при $0<\mu<\mu_0$ задача* (1) - (2) *имеет орбитально асимптотически устойчивое в H^1 периодическое по t решение $u_m=u_m(\eta,\mu)$ $(\eta=\omega(\mu)t+m\theta)$, где*

$$u_m=\hat w(\mu)+\mu^{1/2}a2\cos\eta-\mu a^2\hat K\gamma\cos\hat w\Big[(1+\hat K\gamma\sin\hat w)^{-1}+$$

$$+\operatorname{Re}e^{2i(\eta+m\Delta)}(2i\omega_m(0)+D(2m)^2+1-\Lambda\exp 2im\Delta)^{-1}\Big]+\dots,$$

$$a=\left(-l_1\cos m\Delta(\operatorname{Re}c_1)^{-1}\right)^{1/2},\quad \omega(\mu)=-\gamma K\sin w\sin m\Delta+\operatorname{Im}c_1\mu a^2+\dots.$$

Периодическое решение u_m задачи (1) – (2) *в окрестности $u=\hat w(\mu)$, $\mu=0$ единственно.*

Замечание 1. Условие $\delta_m'(0)>0$ выполняется, если $\cos\hat w\geq-\gamma$.

Замечание 2. Периодическое решение u_m гладко зависит от Δ.

Замечание 3. При $\delta_m'(0)<0$ бифуркация рождения орбитально асимптотически устойчивого в H^1 периодического решения задачи (1) - (2) имеет место при $-\mu_0<\mu<0$.

Периодические решения при вариации Δ. При фиксированном $K = \hat{K}$ пусть $\hat{w}$ является корнем уравнения (4). Обозначим $\Lambda = -\hat{K}\gamma \sin \hat{w}$.

УСЛОВИЕ 3. Предположим, что для некоторого целого положительного m имеется корень $\hat{\Delta}$ уравнения

$$-Dm^2 - 1 + \Lambda \cos(m\Delta) = 0,$$

причем $\sin m\hat{\Delta} \neq 0$,

$$\sup_{k\in\mathbb{Z}, k\neq\pm m} (-Dk^2 - 1 + \Lambda\cos(k\hat{\Delta})) < 0.$$

Из условия 3 следует, что $\Lambda < -1$. Рассмотрим уравнение (1), в котором $\Delta = \hat{\Delta} + \nu$. Рассуждения, аналогичные изложенным выше, приводят к следующей теореме.

Теорема 3. *Пусть выполнено условие 3. Предположим, что* $\sin m\hat{\Delta} > 0$. *Тогда существует такое $\nu_0 > 0$, что при $0 < \nu < \nu_0$ задача* (1) - (2) *имеет орбитально асимптотически устойчивое в H^1 периодическое по t решение $u_m = u_m(\eta, \nu)$ ($\eta = \omega(\nu)t + m\theta$), где*

$$u_m = \hat{w} + \nu^{1/2} a 2\cos\eta - \nu a^2 \hat{K}\gamma \cos\hat{w}\Big[(1-\Lambda)^{-1} +$$

$$+ \operatorname{Re} e^{2i(\eta + m\Delta)}(2i\omega_m(0) + D(2m)^2 + 1 - \Lambda \exp 2im\Delta)^{-1}\Big] + \ldots,$$

$$a = \left(\Lambda m \sin m\hat{\Delta}(\operatorname{Re} c_1)^{-1}\right)^{1/2}, \quad \omega(\nu) = \Lambda \sin m\Delta + \operatorname{Im} c_1 \nu a^2 + \ldots.$$

Постоянная c_1 определена в (14).

Периодическое решение u_m задачи (1) - (2) *в окрестности $u = \hat{w}$, $\nu = 0$ единственно.*

Замечание 4. При $\sin m\hat{\Delta} < 0$ бифуркация рождения орбитально асимптотически устойчивого в H^1 периодического решения $u_m = u_m(\hat{\omega}(\nu)t + mx, \nu)$ задачи (1) – (2) имеет место при $-\nu_0 < \nu < 0$.

Периодические решения в вырожденном случае. Пусть выполнены условия 1, 2. Предположим, что

$$\omega_m(0) = \Lambda \sin m\Delta = 0.$$

Отсюда, учитывая неравенства $\Lambda < -1$, $\cos m\Delta < 0$, следует

$$m\Delta = (2s+1)\pi.$$

Значение Δ, удовлетворяющее этим требованиям, обозначим $\hat{\Delta}$. Пусть

$$\delta'_m(0) = \gamma(\sin\hat{w} + \hat{K}w'(0)\cos\hat{w}) > 0. \tag{18}$$

Положим в (5) $\Delta = \hat{\Delta} + \nu$ и запишем полученное уравнение в виде

$$\dot{v} = \mathfrak{L}(\mu, \nu)v + \mathfrak{R}(v, \mu, \nu). \tag{19}$$

Инвариантным подпространством для этого уравнения является подпространство $H^1_m \subset H^1$, полученное замыканием в H^1 $\mathrm{Span}\{q_{km}, k = 0, \pm 1, \dots\}$. На H^1_m уравнение (19) кроме группы вращения инвариантно относительно отражения $\nu \to -\nu$, $\theta \to -\theta$. Первое "пробное центральное многообразие" уравнения (19) $ze^{im\theta} + \bar{z}e^{-im\theta}$ инвариантно относительно группы преобразований

$$\theta \to \theta + \alpha,\ z \to ze^{-im\alpha},\ \bar{z} \to \bar{z}e^{im\alpha},\ \alpha \in \mathbb{R},$$

а также группы отражений $\nu \to -\nu$, $\theta \to -\theta$, $z \to \bar{z}$. Следовательно, существует гладкое центральное многообразие $\hat{\mathfrak{M}}$, уравнения (19) касательное к $\mathfrak{R}_m \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ в нуле и представимое в форме

$$\hat{\mathfrak{M}} = \{v = ze^{im\theta} + \bar{z}e^{-im\theta} + \sigma(ze^{im\theta}, \bar{z}e^{-im\theta}, \mu, \nu)\}, \tag{20}$$

где $\sigma(\xi, \bar{\xi}, \mu, -\nu) = \sigma(\bar{\xi}, \xi, \mu, \nu)$, $\sigma(\xi, \bar{\xi}, \mu, \nu) = O(|\xi|^2)$ равномерно по μ, ν. Уравнение (19) на $\hat{\mathfrak{M}}$ принимает вид

$$\dot{z} = z(\lambda_m(\mu, \nu) + g(z\bar{z}, \mu, \nu)). \tag{21}$$

Это уравнение инвариантно относительно преобразования $\nu \to -\nu$, $z \to \bar{z}$. Справедливо равенство

$$\lambda_m(\mu, \nu) = \rho + iK\gamma \sin w \sin m\nu, \quad \rho = K\gamma \sin w \cos m\nu - \hat{K}\gamma \sin \hat{w}. \tag{22}$$

Рассуждения, аналогичные изложенным выше, приводят к заключению, что для функции g имеет место представление

$$g = \tilde{c}_1(\mu, \nu)z\bar{z} + o(|z|^2), \tag{23}$$

где

$$\tilde{c}_1(\mu, \nu) = -e^{im\nu}\Big(\frac{1}{2}K\gamma \sin w + (K\gamma \cos w)^2\big((2iK\gamma \sin w \sin m\nu + 1 + K\gamma \sin w)^{-1} +$$

$$+ \exp 2im\nu(2iK\gamma \sin w \sin m\nu + D(2m)^2 + 1 - K\gamma \sin w \exp 2im\nu)^{-1}\big)\Big). \tag{24}$$

В равенстве (22) $\lambda_m(\mu, \nu)$ есть собственное значение оператора $\mathfrak{L}(\mu, \nu)$, соответствующее собственной функции q_m. Очевидно,

$$\mathrm{Re}\,\lambda_m(\mu, -\nu) = \mathrm{Re}\,\lambda_m(\mu, \nu), \quad \mathrm{Im}\,\lambda_m(\mu, -\nu) = -\mathrm{Im}\,\lambda_m(\mu, \nu).$$

Согласно условию (18) $\rho_\mu(0, 0) = \delta'_m(0) > 0$. Поэтому отображение $(\mu, \nu) \to (\rho, \nu)$ в окрестности $(0, 0)$ является обратимым. Обратное отображение $(\mu(\rho, \nu), \nu)$ является аналитическим в окрестности $(0, 0)$. Заметим, что $\mu(\rho, \nu)$ является четной функцией ν. Рассмотрим уравнение

$$\mathrm{Re}\,\lambda_m(\mu, \nu)r + \mathrm{Re}\,g(r^2, \mu, \nu)r = 0. \tag{25}$$

относительно $r > 0$. Перейдем в этом уравнении к параметрам (ρ, ν) и запишем его в форме

$$h(\rho, r, \nu) = \rho r + \mathrm{Re}\,c_1(0, 0)r^3 + \phi(\rho, \nu, r) = 0, \tag{26}$$

где $\phi(\rho, r, \nu) = O(|r|^4 + |\rho r^3| + |\nu r^3|)$, $\dfrac{\partial \phi}{\partial r} = O(|r|^3 + |\sigma r^2| + |\nu r^2|)$. Заметим, что $\varphi(\rho, r, -\nu) = \varphi(\rho, r, \nu)$.

Используя модифицированный метод ломаных Ньютона [7], приходим к заключению, что существуют такие положительные ρ_0, ν_0, что при $0 < \rho < \rho_0$, $|\nu| < \nu_0$ уравнение (26) имеет единственное гладкое положительное решение $r_+(\rho, \nu)$, такое что $h(\rho, r_+(\rho, \nu), \nu) = 0$, $r_+(\rho, -\nu) = r_+(\rho, \nu)$,

$$r_+(\rho, \nu) = \left(-\rho(\operatorname{Re} c_1(0,0))^{-1}\right)^{1/2} + O(\rho, \nu), \quad h_r(\rho, \nu, r_+(\rho, \nu)) < 0.$$

Обозначим $r_+(\rho(\mu, \nu), \nu) = r^+(\mu, \nu)$. Очевидно $r^+(\mu, -\nu) = r^+(\mu, \nu)$. Так как $g(r^2, \mu, -\nu) = \overline{g}(r^2, \mu, \nu)$, $\operatorname{Im} \lambda_m(\mu, 0) = 0$, $\rho(\mu, 0) > 0$ при $\mu > 0$, то уравнение (21) при $\mu > 0$, $\nu = 0$ имеет семейство состояний равновесия, заполняющих окружность $|z| = r^+(\mu, 0)$. Из неравенства $\operatorname{Re} c_1 < 0$ следует, что это инвариантное многообразие является орбитально асимптотически устойчивым. Уравнение (21) при малых $|\nu| \neq 0, \mu > 0$, таких что $\rho(\mu, \nu) > 0$, имеет орбитально асимптотически устойчивое периодическое решение, орбитой которого является окружность $|z| = r^+(\mu, \nu)$, а движение по ней осуществляется с частотой $\hat{\omega}(\mu, \nu)$ $(\hat{\omega}(\mu, -\nu) = -\hat{\omega}(\mu, \nu))$, где

$$\omega(\mu, \nu) = K\gamma \sin w \sin m\nu + \operatorname{Im} g(r^+(\mu, \nu))^2, \mu, \nu). \tag{27}$$

Из нечетности $\omega(\mu, \nu)$ по ν следует, что при переходе ν через 0 происходит смена направления движения фазовых точек.

Это периодическое решение в окрестности нуля единственно.

Применением теоремы сведения [7], [8], [11] убеждаемся в справедливости следующей теоремы.

Теорема 4. *Пусть выполнены сформулированные выше условия. Тогда существуют такие $\mu_0 > 0$, $\nu_0 > 0$, что при $0 < \mu < \mu_0$, $|\nu| < \nu_0$ в области изменения параметров μ, ν, определяемых неравенством $\rho > 0$,*

$$\rho = (\hat{K} + \mu)\gamma \sin w(\mu) \cos m\nu - \hat{K}\gamma \sin \hat{w},$$

задача (1) – (2) имеет орбитально асимптотически устойчивое в H^1 периодическое по t решение $u_m = u_m(\eta, \mu, \nu)$ $(\eta = \omega(\mu, \nu)t + m\theta)$, $(\omega(\mu, -\nu) = -\omega(\mu, \nu))$, где

$$u_m = \hat{w}(\mu) + \left(-\rho(\operatorname{Re} c_1)^{-1}\right)^{1/2} 2\cos\eta + \rho(\operatorname{Re} c_1)^{-1} \hat{K}\gamma \cos \hat{w} \Big[(1 - \Lambda)^{-1} + \operatorname{Re} e^{2i(\eta + m\nu)}(D(2m)^2 + 1 - \Lambda \exp 2im\nu)^{-1}\Big] + \ldots.$$

Периодическое решение u_m задачи (1) – (2) в окрестности $u = \hat{w}, \mu = 0, \nu = 0$ единственно.

Согласно теореме при $\nu = 0$ в задаче (1) – (2) возникает однопараметрическое семейство пространственно-неоднородных стационарных решений – так называемых диссипативных структур. Появление диссипативных структур (структур

Тьюринга) при углах поворота соизмеримых с π было установлено в [1], используя метод линеаризации. В цитированной выше работе был проведен анализ поведения структуры при смещениях угла поворота от критических значений. Теорема 4 придает этим результатам обоснованный характер.

Автор глубоко признателен А. Л. Скубачевскому за ценные советы.

Список литературы

1. Ахманов С.А., Воронцов М. А., Иванов В.Ю. *Генерация структур в оптических системах с двумерной обратной связью: на пути к созданию нелинейно-оптических аналогов нейронных сетей* // Новые принципы оптической обработки информации. М.: Наука, 1990. С. 263-325.
2. Воронцов М. А., Друмаревский Ю. Д., Пруидзе Д. В., Шмальгаузен В.И. *Автоволновые процессы в системах с оптической обратной связью*//Изв. АН СССР. Физика. 1988. Т. 52. N.2. С. 374-376.
3. Разгулин А. В. *Об автоколебаниях в нелинейной параболической задаче с преобразованным аргументом*// Журнал вычислительной математики и математической физики. 1993. Т. 33. N.1. С. 69-80.
4. Разгулин А. В. *Устойчивость бифуркационных автоколебаниях в нелинейной параболической задаче с преобразованным аргументом*// Журнал вычислительной математики и математической физики. 1993. Т. 33. N.10. С.1499-1508.
5. Ruzgulin A. V. *Rotational multi-petal waves in optical system with 2-D feedback* – In Chaos in Optics. ed. Rajarshi Roy. Proceedings SPIE, 1993, 2039, 342-352.
6. Skubachevskii A. L. *Bifurcation of periodic solution for nonlinear parabolic functional differential equations arising in optoelectronics*// Nonlinear Analysis. Theory. Methods & Applications. 1998. Vol. 12 No.2. P. 261 - 278.
7. Хенри Д. *Геометрическая теория полулинейных параболических уравнений.* – М.: Мир, 1985. – 376 с.
8. Марсден Дж., Мак-Кракен М. *Бифуркация рождения цикла и ее приложения* – М.: Мир, 1980. – 368 с.
9. Арнольд В. И., Афраймович В. С., Ильяшенко Ю. С., Шильников Л. П. *Теория бифуркаций.* – Современные направления математики. Фундаментальные направления. Т. 5 (Итоги науки и техн. ВИНИТИ АН СССР) М.: Мир, 1985. – 218 с.
10. Арнольд В. И. *Дополнительные главы теории обыкновенных дифференциальных уравнений.* – М.: Наука, 1978. – 304 с.
11. Хэссард Б., Казаринов Н., Вэн И. *Теория и приложения бифуркации рождения цикла.* – М.: Мир. 1985. – 280 с.