Ученые записки Таврического национального университета им. В. И. Вернадского

Серия "МАТЕМАТИКА" № 1 (2001) 14 – 17

УДК 517.432

ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ ОПЕРАТОРЫ $\mathrm{T}_{\mu\lambda}$ И B_α В ПРОСТРАНСТВЕ С ИНДЕФИНИТНОЙ МЕТРИКОЙ

Байгозина И. Ю.

При исследовании несамосопряженных операторов, действующих в гильбертовом пространстве, существенную роль играют операторы $T_{\mu\lambda}$ И B_α, которые изучались и использовались в ряде работ А. Кужеля [1].

В настоящей работе рассматриваются свойства указанных операторов при условии, что они действуют в пространстве с индефинитной метрикой. Основные трудности, которые при этом возникают, состоят в том, что не каждое подпространство Π_1 пространства с индефинитной метрикой Π является проекционно полным и, таким образом, пользоваться равенством $\Pi = \Pi_1[+]\Pi_2$, где $\Pi_2 = \Pi[-]\Pi_1$, уже не всегда возможно.

Пусть $\mathcal{H}$ – гильбертово пространство со скалярным произведением $(.,.)$ и G – ограниченный самосопряженный непрерывно обратимый оператор, действующий в $\mathcal{H}$. Рассмотрим новое скалярное произведение $[.,.]$, определяемое равенством

$$[x, y] = (Gx, y) \qquad (\{x, y\} \subset \mathcal{H}).$$

Если оператор G не является знакоопределенным (то есть функционал $[x, x]$ может принимать значения разных знаков), то билинейную форму $[x, y]$ называют *индефинитным скалярным произведением.*

Пространство $\mathcal{H}$ с индефинитным скалярным произведением $[.,.]$ называют пространством с индефинитной метрикой и обозначают: Π или $\langle\mathcal{H}, G\rangle$.

Оператор A, действующий в пространстве $\Pi = \langle\mathcal{H}, G\rangle$ называется эрмитовым (или G-эрмитовым), если $[Ax, y] = [x, Ay]$ $(\forall\{x, y\} \subset D_A)$.

Дефектное подпространство $\mathfrak{R}_\lambda$ эрмитова оператора A определяется равенством

$$\mathfrak{R}_\lambda = \Pi[-]\Delta_A(\lambda),$$

где $\Delta_A(\lambda) = \Delta_{A-\lambda I}$.

Линеал

$$L_A = \{x \in D_A \mid [Ax, y] = [x, Ay] \, (\forall y \in D_A)\}$$

называется областью эрмитовости оператора A, а оператор $A_0 = A\big|_{L_A}$ — эрмитовой частью оператора A. Пусть H – эрмитов оператор, действующий в пространстве с индефинитной метрикой Π.

Оператор A называется регулярным расширением оператора H, если $H \subset A_0$. Или, что то же самое, если

$$[Hx, y] = [x, Ay] \ (\forall x \in D_H, \ \forall y \in D_A).$$

Совокупность всех регулярных расширений эрмитова оператора H обозначают $P(H)$. Пусть $A \in P(H)$ и $\lambda \notin \sigma_p(A)$. Рассмотрим оператор $T_{\mu\lambda}$, определяемый соотношениями:

$$T_{\mu\lambda}x = (A - \mu I)h \quad (x = (A - \lambda I)h, \ h \in D_A)$$
$$D_{T_{\mu\lambda}} = \Delta_A(\lambda), \quad \Delta_{T_{\mu\lambda}} = \Delta_A(\mu).$$

В частности, при $\lambda \in \rho(A)$

$$T_{\mu\lambda} = (A - \mu I)(A - \lambda I)^{-1}.$$

Справедливы следующие утверждения:

Теорема 1. *Пусть $A \in P(H)$, $\lambda \notin \rho(A)$ и $\Re_z$ $(z \in \{\lambda, \mu\})$ — дефектное подпространство оператора H. Тогда*

$$T_{\mu\lambda} \colon \Delta_A(\lambda) \cap \Re_{\bar{\mu}} - \Re_{\bar{\lambda}}. \tag{1}$$

В частности, при $\lambda \in \rho(A)$

$$T_{\mu\lambda} \colon \Re_{\bar{\mu}} - \Re_{\bar{\lambda}}, \quad T^{+}_{\mu\lambda} \colon \Re_{\mu} \to \Re_{\lambda}, \tag{2}$$

где $T^{+}_{\mu\lambda}$ — сопряженный к $T_{\mu\lambda}$ в G-метрике оператор.

Доказательство. Пусть $f \in \Delta_A(\lambda) \cap \Re_{\bar{\mu}}$. Тогда $f = (A - \lambda I)\varphi$ $(\varphi \in D_A)$ и

$$[f, (H - \bar{\mu} I)x] = 0 \quad (\forall x \in D_H). \tag{3}$$

Учитывая выражение для вектора f, получим: $T_{\mu\lambda}f = (A - \mu I)\varphi = f + (\lambda - \mu)\varphi$. Поэтому при $x \in D_H$

$$[T_{\mu\lambda}f, (H - \bar{\lambda} I)x] = [f, (H - \bar{\lambda} I)x] + (\lambda - \mu)[\varphi, (H - \bar{\lambda} I)x], \tag{4}$$

где, на основании (3)

$$[f, (H - \bar{\lambda} I)x] = (\mu - \lambda)[f, x]. \tag{5}$$

Кроме того, так как $A \in P(H)$, то

$$[\varphi, (H - \bar{\lambda} I)x] = [\varphi, Hx] - \lambda[\varphi, x] = [A\varphi, x] - \lambda[\varphi, x] = [f, x]. \tag{6}$$

Тогда, на основании (5) и (6), при любом $x \in D_H$ равенство (4) перепишется в виде

$$[T_{\mu\lambda}f, (H - \bar{\lambda} I)x] = (\mu - \lambda)[f, x] + (\lambda \mu)[f, x] = 0.$$

Следовательно, $T_{\mu\lambda}f \in \Re_{\bar{\lambda}}$, что и доказывает (1).

Первое соотношение в (2) следует из (1) при $\lambda \in \rho(A)$. Для доказательства второго соотношения заметим, что если $f \in \Re_{\mu}$ и $x \in D_H$, то

$$[T^{+}_{\mu\lambda}f, (H - \lambda I)x] = [f, (H - \mu I)x] = 0,$$

и, следовательно, $T^{+}_{\mu\lambda}f \in \Re_{\lambda}$. $\square$

Теорема 2. *Пусть $A \in P(H)$, $\lambda \in \rho(A)$ и $\mathfrak{R}_z$ $(z \in \{\lambda, \bar{\lambda}, \mu, \bar{\mu}\})$ — дефектное подпространство оператора H. Тогда векторы $R_\lambda g(\bar{\mu})$ $(g(\bar{\mu}) \in \mathfrak{R}_{\bar{\mu}})$ и $R_\lambda^+ g(\mu)$ $(g(\mu) \in \mathfrak{R}_\mu)$ при $\mu \neq \lambda$ представимы в виде:*

$$R_\lambda g(\bar{\mu}) = \frac{g(\bar{\lambda}) - g(\bar{\mu})}{\lambda - \mu}; \qquad R_\lambda^+ g(\mu) = \frac{g(\lambda) - g(\mu)}{\bar{\lambda} - \bar{\mu}}, \tag{7}$$

где $R_\lambda = (A - \lambda I)^{-1}$, $f(\bar{\lambda})$ и $g(\lambda)$ — некоторые векторы соответственно из $\mathfrak{R}_{\bar{\lambda}}$ и $\mathfrak{R}_\lambda$.

Доказательство. Поскольку $T_{\mu\lambda} = I + (\lambda - \mu)R_\lambda$, то, на основании теоремы 1,

$$T_{\mu\lambda} g(\bar{\mu}) = g(\bar{\mu}) + (\lambda - \mu)R_\lambda g(\bar{\mu}) = g(\bar{\lambda}) \in \mathfrak{R}_{\bar{\lambda}},$$

откуда и следует первое равенство из (7).

Аналогично, воспользовавшись равенством $T_{\mu\lambda}^+ = I + (\bar{\lambda} - \bar{\mu})R_\lambda^+$ и теоремой 1, получим второе равенство из (7). □

Пусть $\rho(A) \neq \varnothing$ и $\alpha \in \rho(A)$ $(\operatorname{Im}\alpha \neq 0)$. Рассмотрим ограниченные самосопряженные операторы:

$$\widetilde{B}_\alpha = iR_\alpha - iR_\alpha^+ + 2\operatorname{Im}\alpha R_\alpha R_\alpha^+, \qquad B_\alpha = iR_\alpha - iR_\alpha^+ + 2\operatorname{Im}\alpha R_\alpha^+ R_\alpha,$$

где $R_\alpha = (A - \alpha I)^{-1}$.

Эти операторы представимы в виде:

$$B_\alpha = \frac{1}{2\operatorname{Im}\alpha}(T_\alpha^+ T_\alpha - I), \qquad \widetilde{B}_\alpha = \frac{1}{2\operatorname{Im}\alpha}(T_\alpha T_\alpha^+ - I), \tag{8}$$

где $T_\alpha = (A - \bar{\alpha}I)(A - \alpha I)^{-1}$ $(= T_{\bar{\alpha}\alpha})$.

Кроме того, для любых $\{x, y\} \subset D_A$ выполняется равенство

$$[B_\alpha(A - \alpha I)x, (A - \alpha I)y] = i[x, Ay] - i[Ax, y]. \tag{9}$$

Аналогично, если $\{x, y\} \subset D_{A^+}$, то

$$[\widetilde{B}_\alpha(A^+ - \bar{\alpha}I)x, (A^+ - \bar{\alpha}I)y] = i[A^+x, y] - i[x, A^+y].$$

Для операторов B_α и $\widetilde{B}_\alpha$ справедлива следующая

Теорема 3. *Пусть $A \in P(H)$ и $\alpha \in \rho(A)$ $(\operatorname{Im}\alpha \neq 0)$. Тогда*

$$B_\alpha \colon \Pi \to \mathfrak{R}_\alpha, \qquad \widetilde{B}_\alpha \colon \Pi \to \mathfrak{R}_{\bar{\alpha}}, \tag{10}$$

где $\mathfrak{R}_\alpha$ и $\mathfrak{R}_{\bar{\alpha}}$ — дефектные подпространства оператора H.

Доказательство. Пусть f и g — произвольные векторы соответственно из Π и $\Delta_H(\alpha)$. Тогда найдутся такие векторы $x \in D_A$ и $y \in D_H$, что $f = (A - \alpha I)x$, $g = (A - \alpha I)y$. Поэтому, на основании (9) и с учетом того, что $y \in L_A$,

$$[B_\alpha f, g] = i[x, Ay] - i[Ax, y] = 0.$$

Таким образом, $B_\alpha f \in \mathfrak{R}_\alpha$, что и доказывает первое соотношение из (10).

Для доказательства второго соотношения из (10) воспользуемся вторым равенством из (8).

Пусть $g_{\bar\alpha} \in \mathfrak{R}_{\bar\alpha}$. Так как $T_\alpha = T_{\bar\alpha\alpha}$, то, на основании теоремы 1, вектор $g_\alpha = T_\alpha^+ g_{\bar\alpha} \in \mathfrak{R}_\alpha$. Но тогда (с учетом теоремы 1) вектор $T_\alpha T_\alpha^+ g_{\bar\alpha} = T_\alpha g_\alpha \in \mathfrak{R}_{\bar\alpha}$.

Следовательно, в силу (8), дефектное подпространство $\mathfrak{R}_{\bar\alpha}$ инвариантно относительно оператора B_α. Теперь достаточно показать, что на $\Delta_H(\bar\alpha)$ оператор $\widetilde{B}_\alpha$ аннулируется.

Пусть $h \in \Delta_H(\bar\alpha)$. Тогда $h = (A-\alpha I)x$, где $x \in D_H$. На основании предыдущего случая оператор B_α аннулируется на подпространстве $\Delta_H(\alpha)$. Следовательно, $B_\alpha(A-\alpha I)x = 0$. А так как

$$B_\alpha - iR_a - iR_\alpha^+ T_\alpha, \qquad T_\alpha(A-\alpha I) = A - \bar\alpha I,$$

то $0 = B_\alpha(A-\alpha I)x = ix - iR_a^+(A-\bar\alpha I)x = ix - iR_\alpha^+ h$ и, таким образом, $R_\alpha^+ h = x$. Но тогда

$$\widetilde{B}_\alpha h = iR_\alpha h - ix + 2\,\mathrm{Im}\,\alpha R_\alpha x = iR_\alpha[(A-\bar\alpha I)x - (A-\alpha I)x + (\bar\alpha - \alpha)x] = 0.$$

□

С помощью теоремы 3 можно легко доказать справедливость следующей теоремы:

Теорема 4. *Пусть $\alpha \in \rho(A)$ $(\bar\alpha \neq \alpha)$. Тогда*

$$\mathrm{Ker}\, B_\alpha = \Delta_{A_0}(\alpha), \qquad \mathrm{Ker}\, \widetilde{B}_\alpha = \Delta_{A_0}(\bar\alpha),$$

где A_0 — эрмитова часть оператора A.

Список литературы

1. A. Kuzhel. *Characteristic Functions and Models of nonself-Adjoint Operators.* Dordrecht. The Netherlands. 1996, p.340.