Ученые записки Таврического национального университета им. В. И. Вернадского

Серия "МАТЕМАТИКА" № 1 (2001) 18 – 23

УДК 532.5:517.9:532

МАЛЫЕ ДВИЖЕНИЯ ДВОЙНОГО МАЯТНИКА С ПОЛОСТЯМИ, СОДЕРЖАЩИМИ ИДЕАЛЬНУЮ НЕСЖИМАЕМУЮ ЖИДКОСТЬ

Батыр Э. И.

Постановка задачи

Рассматривается система двух тел G_1 и G_2, имеющих общую точку O_2. Тело G_1 имеет неподвижную точку O_1. Система совершает малые движения вблизи состояния покоя. Тело G_i содержит полость Ω_i, заполненную идеальной несжимаемой жидкостью, $i = 1, 2$.

Введем в трехмерном пространстве $\mathbf{R}^3$ неподвижную систему координат $O_1x^1x^2x^3$. Рассмотрим подвижную систему координат $O_1x_1^1x_1^2x_1^3$ с началом в точке O_1, жестко связанную с первым телом. Рассмотрим также подвижную систему координат $O_2x_2^1x_2^2x_2^3$ с началом в точке O_2, жестко связанную со вторым телом. Единичные векторы осей системы $O_1x^1x^2x^3$ обозначаются через $\vec{e}^i$, а осей систем $O_1x_1^1x_1^2x_1^3$ и $O_2x_2^1x_2^2x_2^3$ — через $\vec{e}_1^i$ и $\vec{e}_2^i$ соответственно ($i = 1, 2, 3$).

Положение подвижной системы координат $O_1x_1^1x_1^2x_1^3$ относительно неподвижной системы координат $O_1x^1x^2x^3$ задается вектором углового перемещения $\vec{\delta}_1(t)$, его длина есть угол поворота оси, направление по правилу буравчика [1]: $\vec{\delta}_1(t) = \sum\limits_{k=1}^{3}\delta_1^k\vec{e}_1^k$. Положение подвижной системы координат $O_2x_2^1x_2^2x_2^3$ относительно неподвижной системы координат $O_1x^1x^2x^3$ задается вектором углового перемещения $\vec{\delta}_2(t)$, его длина есть угол поворота оси, направление по правилу буравчика: $\vec{\delta}_2(t) = \sum\limits_{k=1}^{3}\delta_2^k\vec{e}_2^k$.

Пусть m_1 и m_2 — массы соответственно первого и второго тел;
$\vec{h} = h\vec{e}_1^3 (h > 0)$ — вектор, соединяющий полюсы O_1 и O_2;
$\vec{r}_i$ — радиус-вектор, связывающий полюс O_i с точкой тела G_i;
$\vec{c}_i = \alpha_i\vec{e}_i^3 (\alpha_i > 0)$— радиус-вектор центра тяжести тела G_i, $(i = 1, 2)$.
На систему действует сила тяжести $\vec{g} = -g\vec{e}^3$. Силы трения в точках O_1 и O_2 отсутствуют.

Линеаризованные уравнения движения двух гиростатов таковы [2]:

$$J_1\frac{d\vec{\omega}_1}{dt} + L_1\frac{\partial\vec{u}_1}{\partial t} + m_2\vec{h}\times(\frac{d\vec{\omega}_1}{dt}\times\vec{h}) + m_2\vec{h}\times(\frac{d\vec{\omega}_2}{dt}\times\vec{c}_2) + \rho_2\int\limits_{\Omega_2}\vec{h}\times\frac{\partial\vec{u}_2}{\partial t}d\Omega_2 =$$

$$= -(m_1\alpha_1 + m_2h)g(\delta_1^1\vec{e}_1^1 + \delta_1^2\vec{e}_1^2) + \vec{M}_1 - \vec{M}_2, \quad (1)$$

$$J_2\frac{d\vec{\omega}_2}{dt} + L_2\frac{\partial\vec{u}_2}{\partial t} + m_2\vec{c}_2 \times (\frac{d\vec{\omega}_1}{dt} \times \vec{h}) = -m_2\alpha_2 g(\delta_2^1\vec{e}_2^1 + \delta_2^2\vec{e}_2^2) + \vec{M}_2. \quad (2)$$

Здесь J_i — тензор инерции гиростата G_i в точке O_i, $\vec{M}_i$ — суммарный момент относительно полюса O_i всех сил, действующих на систему, $\vec{\omega}_i = d\vec{\delta}_i/dt$— абсолютная угловая скорость тела G_i, $\vec{u}_i = \vec{u}_i(t, \vec{r}_i)$- относительная скорость жидкости, $i = 1, 2$. Через L_i обозначен гиростатический момент гиростата G_i в точке O_i: $L_i\vec{u}_i := \rho_i \int_{\Omega_i} \vec{r}_i \times \vec{u}_i d\Omega_i$.

Рассмотрим теперь линеаризованные уравнения и краевые условия гидродинамической части задачи. В подвижной системе координат $O_1x_1^1x_1^2x_1^3$ уравнения для определения поля относительной скорости $\vec{u}_1 = \vec{u}_1(t, \vec{r}_1)$, динамического давления $p_1(t, \vec{r}_1)$, с учетом малого внешнего поля массовых сил $\vec{f}_1 = \vec{f}_1(t, \vec{r}_1)$ при постоянной плотности жидкости ρ_1 имеют вид [1]:

$$\begin{gathered}\frac{\partial\vec{u}_1}{\partial t} + \frac{d\vec{\omega}_1}{dt} \times \vec{r}_1 = -\rho_1^{-1}\nabla p_1 + \vec{f}_1, \quad \operatorname{div}\vec{u}_1 = 0 \quad (\text{ в } \Omega_1),\\ \vec{u}_1 \cdot \vec{n}_1 = 0 \quad (\text{ на } \partial\Omega_1).\end{gathered} \quad (3)$$

В подвижной системе координат $O_2x_2^1x_2^2x_2^3$ линеаризованные уравнения для определения поля относительной скорости $\vec{u}_2 = \vec{u}_2(t, \vec{r}_2)$, динамического давления $p_2(t, \vec{r}_2)$, с учетом малого внешнего поля массовых сил $\vec{f}_2 = \vec{f}_2(t, \vec{r}_2)$ при постоянной плотности жидкости ρ_2 имеют вид:

$$\begin{gathered}\frac{\partial\vec{u}_2}{\partial t} + \frac{d\vec{\omega}_2}{dt} \times \vec{r}_2 + \frac{d\vec{\omega}_1}{dt} \times \vec{h} = -\rho_2^{-1}\nabla p_2 + \vec{f}_2, \quad \operatorname{div}\vec{u}_2 = 0 \quad (\text{ в } \Omega_2),\\ \vec{u}_2 \cdot \vec{n}_2 = 0 \quad (\text{ на } \partial\Omega_2).\end{gathered} \quad (4)$$

Добавим уравнения связи

$$\frac{d\vec{\delta}_1}{dt} - \vec{\omega}_1 = 0, \qquad \frac{d\vec{\delta}_2}{dt} - \vec{\omega}_2 = 0. \quad (5)$$

Для полной математической формулировки задачи к уравнениям (1)— (5) следует еще добавить начальные условия:

$$\begin{gathered}\vec{u}_1(0, \vec{r}_1) = \vec{u}_1^0(\vec{r}_1), \quad \vec{\omega}_1(0) = \vec{\omega}_1^0, \quad \vec{\delta}_1(0) = \vec{\delta}_1^0,\\ \vec{u}_2(0, \vec{r}_2) = \vec{u}_2^0(\vec{r}_2), \quad \vec{\omega}_2(0) = \vec{\omega}_2^0, \quad \vec{\delta}_2(0) = \vec{\delta}_2^0,\end{gathered} \quad (6)$$

Преобразование уравнений движения гиростатов

Для исследования задачи (1) — (6) воспользуемся подходом, описанным в случае одного подвижного тела в [1]. Будем считать, что при каждом t все члены в уравнениях Эйлера (3) и (4) принадлежат пространству $L_2(\Omega_i) = J_0(\Omega_i) \oplus G(\Omega_i)$, $J_0(\Omega_i) := \{u_i \in L_2(\Omega_i) |\operatorname{div}\vec{u}_i \doteq 0 \,(\text{в } \Omega_i), \ \vec{u}_i \cdot \vec{n}_i = 0 \,(\text{на } S_i)\}$, $G(\Omega_i) := \{\vec{u}_i \in L_2(\Omega_i) | \ \vec{u}_i = \nabla p_i\}$. В соответствии с этим далее частные производные $\partial/\partial t$ для полей скоростей заменим на d/dt, считая, что эти поля являются функциями t со значениями в $L_2(\Omega_i)$.

Применим к обеим частям этих уравнений оператор ортогонального проектирования P_{0i} на подпространство $J_0(\Omega_i)$, $i = 1, 2$; будем иметь

$$\frac{d\vec{u}_1}{dt} = -P_{01}(\frac{d\vec{\omega}_1}{dt} \times \vec{r}_1) + P_{01}(\vec{f}_1). \tag{7}$$

$$\frac{d\vec{u}_2}{dt} = -P_{02}(\frac{d\vec{\omega}_2}{dt} \times \vec{r}_2) - P_{02}(\frac{d\vec{\omega}_1}{dt} \times \vec{h}) + P_{02}(\vec{f}_2). \tag{8}$$

Решение уравнений (7)— (8) с помощью потенциалов Жуковского описано в монографии [1].

Пользуясь (7) и (8), можно в уравнениях (1) и (2) исключить $d\vec{u}_1/dt$ и $d\vec{u}_2/dt$, имеем:

$$\begin{gathered} J_1\frac{d\vec{\omega}_1}{dt} + \rho_1\int\limits_{\Omega_1} \vec{r}_1 \times (-P_{01}(\frac{d\vec{\omega}_1}{dt} \times \vec{r}_1))d\Omega_1 + m_2\vec{h} \times (\frac{d\vec{\omega}_1}{dt} \times \vec{h}) + \\ + m_2\vec{h} \times (\frac{d\vec{\omega}_2}{dt} \times \vec{c}_2) + \rho_2\int\limits_{\Omega_2} \vec{h} \times (-P_{02}(\frac{d\vec{\omega}_2}{dt} \times \vec{r}_2) - P_{02}(\frac{d\vec{\omega}_1}{dt} \times \vec{h}))d\Omega_2 + \\ + (m_1\alpha_1 + m_2h)g(\delta_1^1\vec{e}_1^1 + \delta_1^2\vec{e}_1^2) = \vec{M}_1 - \vec{M}_2 - \\ - \rho_1\int\limits_{\Omega_1} \vec{r}_1 \times (-P_{01}\vec{f}_1)d\Omega_1 + \rho_2\int\limits_{\Omega_2} \vec{h} \times (-P_{02}\vec{f}_2)d\Omega_2, \end{gathered} \tag{9}$$

$$\begin{gathered} J_2\frac{d\vec{\omega}_2}{dt} + \rho_2\int\limits_{\Omega_2} \vec{r}_2 \times (-P_{02}(\frac{d\vec{\omega}_2}{dt} \times \vec{r}_2) - P_{02}(\frac{d\vec{\omega}_1}{dt} \times \vec{h}))d\Omega_2 + m_2\vec{c}_2 \times (\frac{d\vec{\omega}_1}{dt} \times \vec{h}) + \\ + m_2\alpha_2 g(\delta_2^1\vec{e}_2^1 + \delta_2^2\vec{e}_2^2) = \vec{M}_2 + \rho_2\int\limits_{\Omega_2} \vec{r}_2 \times (-P_{02}\vec{f}_2)d\Omega_2. \end{gathered} \tag{10}$$

Переход к задаче Коши для дифференциального уравнения

Рассмотрим уравнения (9) и (10) как систему уравнений относительно вектор столбца $\vec{\delta} = (\vec{\delta}_1(t), \vec{\delta}_2(t))^t$, считающегося функцией t со значениями в пространстве $\mathbf{R}^6 := \mathbf{R}^3 \dotplus \mathbf{R}^3$. Коротко эту систему можно записать в виде одного уравнения:

$$A\frac{d^2\vec{\delta}}{dt^2} + B\vec{\delta} = \vec{M}(t), \quad \vec{\delta}(0) = (\vec{\delta}_1(0), \vec{\delta}_2(0))^t. \tag{11}$$

Здесь матрицы $A = (A_{ij})_{i,j=1}^2$ и $B = (B_{ij})_{i,j=1}^2$ действуют следующим образом:

$$A\begin{pmatrix}\vec{\delta}_1\\ \vec{\delta}_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}A_{11}\vec{\delta}_1 + A_{12}\vec{\delta}_2\\ A_{21}\vec{\delta}_1 + A_{22}\vec{\delta}_2\end{pmatrix}, \quad A_{11}\vec{\delta}_1 := J_1\vec{\delta}_1 - \rho_1\int\limits_{\Omega_1} \vec{r}_1 \times P_{01}(\vec{\delta}_1 \times \vec{r}_1)d\Omega_1 +$$

$$+ m_2\vec{h} \times (\vec{\delta}_1 \times \vec{h}) - \rho_2 \int\limits_{\Omega_2} \vec{h} \times P_{02}(\vec{\delta}_1 \times \vec{h}) d\Omega_2,$$

$$A_{12}\vec{\delta}_2 := m_2\vec{h} \times (\vec{\delta}_2 \times \vec{c}_2) - \rho_2 \int\limits_{\Omega_2} \vec{h} \times P_{02}(\vec{\delta}_2 \times \vec{r}_2) d\Omega_2,$$

$$A_{21}\vec{\delta}_1 := m_2\vec{c}_2 \times (\vec{\delta}_1 \times \vec{h}) - \rho_2 \int\limits_{\Omega_2} \vec{r}_2 \times P_{02}(\vec{\delta}_1 \times \vec{h}) d\Omega_2,$$

$$A_{22}\vec{\delta}_2 := J_2\vec{\delta}_2 - \rho_2 \int\limits_{\Omega_2} \vec{r}_2 \times P_{02}(\vec{\delta}_2 \times \vec{r}_2) d\Omega_2. \quad (12)$$

$$B \begin{pmatrix} \vec{\delta}_1, \\ \vec{\delta}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B_{11}\vec{\delta}_1 + B_{12}\vec{\delta}_2 \\ B_{21}\vec{\delta}_1 + B_{22}\vec{\delta}_2 \end{pmatrix}, \quad B_{11}\vec{\delta}_1 := (m_1\alpha_1 + m_2 h) g (\delta_1^1 \vec{e}_1^{\,1} + \delta_1^2 \vec{e}_1^{\,2}), \quad (13)$$

$$B_{12}\vec{\delta}_2 := 0, \quad B_{21}\vec{\delta}_1 := 0, \quad B_{22}\vec{\delta}_2 := m_2\alpha_2 g (\delta_2^1 \vec{e}_2^{\,1} + \delta_2^2 \vec{e}_2^{\,2}).$$

$$\vec{M}(t) := \begin{pmatrix} \vec{M}_1 - \vec{M}_2 - \rho_1 \int_{\Omega_1} \vec{r}_1 \times P_{01}\vec{f}_1 d\Omega_1 - \rho_2 \int_{\Omega_2} \vec{h} \times P_{02}\vec{f}_2 d\Omega_2 \\ \vec{M}_2 - \rho_2 \int_{\Omega_2} \vec{r}_2 \times P_{02}\vec{f}_2 d\Omega_2 \end{pmatrix} \quad (14)$$

Вспомогательные утверждения и основные теоремы о разрешимости начально-краевой задачи

Лемма 1. *Матрица A является самосопряженной и положительной.*

Лемма 2. *Матрица B является самосопряженной и неотрицательной.*

Лемма 3. *Ядро $KerB$ матрицы B двумерно и образовано векторами $(\vec{e}_1^{\,3}, 0)^t$ и $(0, \vec{e}_2^{\,3})^t$.*

Эти свойства позволяют установить следующие факты, обобщающие известную теорему Н.Е. Жуковского [1].

Теорема 1. *Если поле массовых сил потенциально, то система двух тел (двойной маятник) с полостями, полностью заполненными идеальной жидкостью, движется под действием внешних сил так же, как движется под действием этой же системы сил система двух твердых тел с измененными характеристиками.*

Обозначим основные характеристики двойного маятника с полостями, полностью заполненными затвердевшей (неподвижной) жидкостью, следующим образом: $\tilde{A}$— матрица кинетической энергии, $\tilde{B}$— матрица потенциальной энергии, $\tilde{M}$— вектор главных моментов всех сил, действующих на систему. Тогда при выполнении условий теоремы 1 верны следующие соотношения: $\tilde{A} \geq A$,

$\tilde{B} = B$, $\tilde{M} = \vec{M}$. При этом матрицу A можно представить в виде $A = \tilde{A} + R$, где

$$R\begin{pmatrix}\vec{\delta}_1\\ \vec{\delta}_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}R_{11}\vec{\delta}_1 + R_{12}\vec{\delta}_2\\ R_{21}\vec{\delta}_1 + R_{22}\vec{\delta}_2\end{pmatrix}, \quad R_{11}\vec{\delta}_1 := \rho_1\int\limits_{\Omega_1}\vec{r}_1\times P_{01}(\vec{\delta}_1\times\vec{r}_1)d\Omega_1 +$$

$$+\rho_2\int\limits_{\Omega_2}\vec{h}\times P_{02}(\vec{\delta}_1\times\vec{h})d\Omega_2, \quad R_{12}\vec{\delta}_2 := \rho_2\int\limits_{\Omega_2}\vec{h}\times(P_{02}(\vec{\delta}_2\times\vec{r}_2)d\Omega_2,$$

$$R_{21}\vec{\delta}_1 := \rho_2\int\limits_{\Omega_2}\vec{r}_2\times P_{02}(\vec{\delta}_1\times\vec{h})d\Omega_2, \quad R_{22}\vec{\delta}_2 := \rho_2\int\limits_{\Omega_2}\vec{r}_2\times P_{02}(\vec{\delta}_2\times\vec{r}_2)d\Omega_2. \quad (15)$$

Лемма 4. *Матрица R является самосопряженной и положительной.*

Теорема 2. *Для Задачи Коши* (11) *существует единственное решение на интервале* $[0,T]$, *если выполнены следующие условия:*

1. $\vec{u}_1^0 \in J_0(\Omega_1)$, $\vec{u}_2^0 \in J_0(\Omega_2)$, $\vec{\omega}_1^0 \in R^3$, $\vec{\omega}_2^0 \in R^3$, $\vec{\delta}_1^0 \in R^3$, $\vec{\delta}_2^0 \in R^3$;

2. $\vec{f}_i(t) \in C([0,T]; \ L_2(\Omega_i))$;

3. $\vec{M}_i(t) \in C([0,T])$, $i = 1,2$.

Теорема 3. *Для указанного решения выполнен закон баланса полной энергии*

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\{\rho_1\int\limits_{\Omega_1}|\vec{u}_1|^2 d\Omega_1 + 2\rho_1\int\limits_{\Omega_1}(\vec{\omega}_1\times\vec{r}_1)\cdot\vec{u}_1 d\Omega_1 + J_1\vec{\omega}_1\cdot\vec{\omega}_1\} +$$

$$+\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\{\rho_2\int\limits_{\Omega_2}|\vec{u}_2|^2 d\Omega_2 + 2\rho_2\int\limits_{\Omega_2}(\vec{\omega}_2\times\vec{r}_2)\cdot\vec{u}_2 d\Omega_2 + m_2|\vec{\omega}_1\times\vec{h}|^2 +$$

$$+2\rho_2\int\limits_{\Omega_2}(\vec{\omega}_1\times\vec{h})\cdot(\vec{\omega}_2\times\vec{r}_2)d\Omega_2 + 2\rho_2\int\limits_{\Omega_2}(\vec{\omega}_1\times\vec{h})\cdot\vec{u}_2 d\Omega_2 + J_2\vec{\omega}_2\cdot\vec{\omega}_2\} +$$

$$+\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\{(m_1\alpha_1 g + m_2 h g)((\delta_1^1)^2 + (\delta_1^2)^2)\} + \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\{m_2\alpha_2 g((\delta_2^1)^2 + (\delta_2^2)^2)\} =$$

$$= \rho_1\int\limits_{\Omega_1}\vec{f}_1\cdot\vec{u}_1 d\Omega_1 + \rho_2\int\limits_{\Omega_2}\vec{f}_2\cdot\vec{u}_2 d\Omega_2 + \vec{M}_1\cdot\vec{\omega}_1 - \vec{M}_2\cdot\vec{\omega}_1 + \vec{M}_2\cdot\vec{\omega}_2. \quad (16)$$

Собственные колебания

Рассмотрим решения однородной задачи (11), зависящих от времени по закону $\vec{\delta}(t) = \vec{\eta}e^{i\omega t}$, где ω — частота собственных колебаний. Получаем задачу

$$B\vec{\eta} = \lambda A\vec{\eta}, \quad \lambda = \omega^2, \quad \vec{\eta} \in \mathbf{R}^3 \oplus \mathbf{R}^3 \quad (17)$$

Теорема 4. *Для задачи* (17) *существуют собственные значения* λ_k $(k = \overline{1,6})$ *и отвечающие им собственные элементы* $\vec{\eta}_k$, *для которых*

$$(B\vec{\eta}_k, \vec{\eta}_j) = \lambda_k(A\vec{\eta}_k, \vec{\eta}_j) = \lambda_k\delta_{kj}, \quad \lambda_1, \lambda_2 = 0, \quad \lambda_3, \lambda_4, \lambda_5, \lambda_6 > 0.$$

Обозначим через $\tilde{\lambda}_k$ собственные значения задачи

$$\tilde{B}\vec{\xi} = \tilde{\lambda}\tilde{A}\vec{\xi}, \quad \tilde{\lambda} = \tilde{\omega}^2, \quad \vec{\xi} \in \mathbf{R}^3 \dotplus \mathbf{R}^3 \tag{18}$$

Для спектральных задач (17) и (18) верны следующие соотношения $\lambda_k \geq \tilde{\lambda}_k$, $k = 1, 2, \ldots, 6$

Список литературы

1. Копачевский Н.Д., Крейн С.Г., Нго Зуй Кан. *Операторные методы в линейной гидродинамике: Эволюционные и спектральные задачи.*- М.: Наука, 1989, – 416 с.
2. Горр Г.В., Кудряшова Л.В., Степанова Л.А. *Классические задачи динамики твердого тела.* К.: Наук. думка, 1978, 296 с.
3. Ишлинский А.Ю. *Механика относительного движения.* – М.: Наука, 1981, – 191 с.
4. Лурье Л.И. *Аналитическая механика.* – М.: Гос. изд-во физ.-мат. лит-ры, 1961, – 824 с.