Ученые записки Таврического национального университета им. В. И. Вернадского

Серия "МАТЕМАТИКА" № 1 (2001) 5 - 13

УДК 517.9

ФУНКЦИОНАЛЫ ЛЯПУНОВА-КРАСОВСКОГО В ТЕОРИИ УСТОЙЧИВОСТИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С КОНЕЧНЫМ ЗАПАЗДЫВАНИЕМ

Анашкин О. В.

Введение

Статья посвящена задаче об устойчивости нулевого решения функционально-дифференциального уравнения запаздывающего типа

$$\dot{x}(t) = f(t, x_t), \tag{1}$$

где $x = (x_1, \dots, x_n)$, правая часть уравнения определена в области $G = \mathbb{R}_+ \times \mathcal{B}_H$, $\mathbb{R}_+ = [0, \infty)$, $\mathcal{B}_H = \{\varphi \in C_h : \|\varphi\| < H\}$ – открытый шар радиуса H в банаховом пространстве $C_h = C([-h, 0], \mathbb{R}^n)$ непрерывных на отрезке $[-h, 0]$ функций с нормой $\|\varphi\| = \max\{|\varphi(s)| : -h \le s \le 0\}$, $|\cdot|$ – некоторая норма в $\mathbb{R}^n$, $h > 0$ — максимальная величина запаздывания. Для данной непрерывной функции $x(t)$ мы обозначаем через x_t элемент пространства C_h, определяемый как $x_t(s) = x(t + s)$, $-h \le s \le 0$.

Предполагается, что уравнение (1) имеет нулевое решение, $f(t, 0) \equiv 0$, и функция f удовлетворяет условиям (например, условиям Каратеодори [2], с. 58), обеспечивающим существование непрерывного решения $x(t_0, \varphi_0) : t \mapsto x(t; t_0, \varphi_0)$ для любых начальных данных из области G.

Основным инструментом исследования устойчивости решений функционально-дифференциальных уравнений является метод функционалов Ляпунова-Красовского. Н. Н. Красовский [1] предложил исследовать задачу об устойчивости нулевого решения уравнения с конечным запаздыванием с помощью непрерывных функционалов $v : G \to \mathbb{R}$, $v(t, 0) \equiv 0$, определенных в бесконечномерном пространстве отрезков траекторий x_t, получил аналоги основных теорем Ляпунова для обыкновенных дифференциальных уравнений и доказал их обратимость. Однако платой за универсальность второго метода Ляпунова для дифференциальных уравнений с запаздыванием является то, что задача построения функционала, удовлетворяющего одной из теорем Красовского, оказывается еще более сложной, чем поиск функции Ляпунова для обыкновенного дифференциального уравнения, который является скорее искусством, чем регулярным техническим приемом. Поэтому публикуется большое количество работ, авторы которых предлагают те или иные формулировки условий устойчивости в терминах функционалов Ляпунова-Красовского для определенных классов уравнений, позволяющие ослабить ограничения классических теорем Красовского. Отметим статью [3], в которой предложены условия устойчивости, использующие немонотонные вдоль решений уравнения (1) функционалы.

В настоящей статье реализуется новый подход к задаче устойчивости для функционально-дифференциальных уравнений вида (1). В основе этого подхода лежит свойство траектории $x_t(t_0, \varphi_0)$ решения $x(t_0, \varphi_0)$ уравнения (1) в пространстве состояний C_h, которое позволяет ей уходить от начала не в любом направлении, а лишь в пределах сравнительно "узкого" (с пустой внутренностью) множества состояний $\mathcal{A}_1$. Показано, что такое ключевое свойство, как знакоопределенность, функционал и его производная могут иметь не в полной окрестности начала пространства C_h, а лишь в некотором конусе, содержащем уже упомянутое выше множество $\mathcal{A}_1$. Свойства этих множеств рассматриваются в первом разделе статьи. Во втором разделе они применяются в доказательствах теорем об устойчивости и асимптотической устойчивости.

Конус $\mathcal{A}_R$ и его свойства

Пусть $R \geq 1$ — действительное число. Введем в рассмотрение множество

$$\mathcal{A}_R = \{\varphi \in C_h : \|\varphi\| \leq R|\varphi(0)|\}.$$

Нетрудно показать, что это множество является *невыпуклым конусом* и обладает следующими свойствами:

— $\mathrm{int}\mathcal{A}_R \neq \emptyset$ при $R > 1$;

— $\mathcal{A}_{R_1} \subset \mathcal{A}_{R_2}$ при $R_1 < R_2$;

— граница $\partial\mathcal{A}_R$ множества $\mathcal{A}_R$ состоит из элементов $\varphi \in C_h$, удовлетворяющих условию: $\|\varphi\| = R|\varphi(0)|$;

— множество

$$\mathcal{A}_1 = \{\varphi \in C_h : \|\varphi\| = |\varphi(0)|\}$$

не имеет внутренних точек, $\mathrm{int}\mathcal{A}_1 = \emptyset$, и $\mathcal{A}_1 \subset \mathcal{A}_R$, для любого $R > 1$.

Данное определение конуса $\mathcal{A}_R$ впервые введено в статьях автора [4, 6]. Свойства $\mathrm{int}\mathcal{A}_R$ изучались в работе [5]. В этом разделе мы продолжим изучение свойств конуса $\mathcal{A}_R$ и докажем несколько технических лемм, используемых далее в доказательствах теорем о достаточных условиях устойчивости.

Лемма 1. *Пусть $R_2 > R_1 \geq 1$ и $\varphi_2 \in \partial\mathcal{A}_{R_2}$, тогда существует функция $\widehat{\varphi}_1 \in \partial\mathcal{A}_{R_1}$ такая, что*

$$\|\varphi_2 - \widehat{\varphi}_1\| = \inf_{\varphi_1 \in \partial\mathcal{A}_{R_1}} \|\varphi_2 - \varphi_1\| = \frac{R_2 - R_1}{R_2(R_1 + 1)}\|\varphi_2\|.$$

причем $\|\widehat{\varphi}_1\| = \frac{1+1/R_2}{1+1/R_1}\|\varphi_2\| < \|\varphi_2\|$

Если же дополнительно предположить, что точки $\varphi_1 \in \partial\mathcal{A}_{R_1}$, $\varphi_2 \in \partial\mathcal{A}_{R_2}$ *находятся вне* η*-окрестности начала, то*

$$\inf_{\substack{\varphi_i \in \partial\mathcal{A}_{R_i}, \\ \|\varphi_i\| \geq \eta, i=1,2}} \|\varphi_2 - \varphi_1\| = \frac{R_2 - R_1}{R_2 R_1}\eta > 0,$$

причем точная нижняя грань достигается на функциях $\widetilde{\varphi}_1$ *и* $\widetilde{\varphi}_2$ *таких, что* $\|\widetilde{\varphi}_2\| = \|\widetilde{\varphi}_1\| = \eta$.

Доказательство. Опуская некоторые подробности, изложим основные этапы доказательства. По определению конуса $\mathcal{A}_R$ для данных функций $\varphi_i \in \partial\mathcal{A}_{R_i}$, $i = 1, 2$, найдутся непустые множества $S_i \subset [-h, 0)$ такие, что $\|\varphi_i\| = R_i|\varphi(\tau_i)|$ для $\tau_i \in S_i$. Поэтому при любом выборе функции $\varphi_1 \in \partial\mathcal{A}_{R_1}$ имеет место оценка $\|\varphi_2 - \varphi_1\| \geq \Big|\|\varphi_2\| - \|\varphi_1\|\Big|$, причем функцию $\varphi_1 \in \partial\mathcal{A}_{R_1}$ всегда можно выбрать так, что $|\varphi_2(\tau) - \varphi_1(\tau)| = \Big|\|\varphi_2\| - \|\varphi_1\|\Big|$ для некоторого $\tau \in S_1 \cap S_2$. С другой стороны $\|\varphi_2 - \varphi_1\| \geq \Big||\varphi_2(0)| - |\varphi_1(0)|\Big|$. Остается заметить, что можно выбрать $\varphi_1 \in \partial\mathcal{A}_{R_1}$ так, что для $s \in [-h, 0]$

$$|\varphi_2(s) - \varphi_1(s)| \leq d(\varphi_1) = \max\Big\{\Big|\|\varphi_2\| - \|\varphi_1\|\Big|, \Big||\varphi_2(0)| - |\varphi_1(0)|\Big|\Big\}.$$

Следовательно

$$\inf_{\varphi_1 \in \partial\mathcal{A}_{R_1}} \|\varphi_2 - \varphi_1\| = \inf_{\varphi_1 \in \partial\mathcal{A}_{R_1}} d(\varphi_1).$$

Определим $r > 0$ и $\lambda > 0$ так, что $r = \|\varphi_2\|$, $\|\varphi_1\| = \lambda\|\varphi_2\|$. Тогда $|\varphi_2(0)| = r/R_2$, $\|\varphi_1\| = \lambda r$, $|\varphi_1(0)| = (\lambda r)/R_1$. Рассмотрим раздельно два случая: $1 \leq \lambda$ и $0 < \lambda < 1$. При $1 \leq \lambda$ минимальное значение $d(\varphi_1)$ достигается при $\lambda = 1$ и равно $d_1 = \frac{R_2 - R_1}{R_1 R_2}\|\varphi_2\|$. Анализируя второй случай, находим, что при $0 < \lambda < 1$ минимальное значение $d(\varphi_1)$ достигается при $\lambda = \lambda_0 = \frac{(R_2+1)R_1}{(R_1+1)R_2} = \frac{1+1/R_2}{1+1/R_1} < 1$ и равно $d_2 = \frac{R_2 - R_1}{R_2(R_1+1)}\|\varphi_2\| < d_1$. При этом наименьшее значение $d(\varphi_1) = d_2$ достигается на функции $\widehat{\varphi}_1 \in \partial\mathcal{A}_{R_1}$, удовлетворяющей условию $\|\widehat{\varphi}_1\| = \lambda_0\|\varphi_2\| < \|\varphi_2\|$. □

Лемма 2. *Пусть* $x : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}^n$ *непрерывная функция и* $|x(t_0)| < \|x_{t_0}\| = \max\{|x(s)|, s \in [t_0 - h, t_0]\}$. *Тогда* $\|x_t\|$ *не возрастает в точке* t_0.

Доказательство. Из условия леммы следует, что найдутся такие достаточно малые числа $\varepsilon > 0$ и $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, что $|x(t)| \leq \|x_{t_0}\| - \varepsilon$ при $t \in [t_0, t_0 + \delta]$. Тогда для всякого $t \in [t_0, t_0 + \delta]$

$$\|x_t\| = \max_{[t-h,t]} |x(s)| = \max\{\max_{[t-h,t_0]} |x(s)|, \max_{[t_0,t]} |x(s)|\} \leq \|x_{t_0}\|.$$

Что и требовалось доказать. □

Из леммы 2 немедленно следует свойство траекторий уравнения (1), самым существенным образом используемое в этой статье.

Следствие. *Норма $\|x_t\|$ точки x_t на фазовой кривой решения функционально-дифференциального уравнения* (1) *в пространстве состояний C_h может возрастать лишь при тех значениях t, когда $\|x_t\| = |x(t)|$, т.е., x_t находится в конусе A_1.*

Лемма 3. *Пусть для некоторого r, $0 < r \le \infty$, $x : [t_0 - h, r) \to \mathbb{R}^n$ — непрерывная функция и существует константа $R > 1$ такая, что*

$$|x(t)| \le \frac{\|x_t\|}{R} \equiv \frac{1}{R}\max\{|x(t+s)| : -h \le s \le 0\} \tag{2}$$

для всех $t \in [t_0, r)$. Тогда

$$|x(t)| \le \frac{\|x_{t_0}\|}{R^{N+1}} \qquad \text{при} \quad t_0 + Nh \le t < r, N = 0, 1, \dots .$$

Доказательство. Обозначим $t_N = t_0 + Nh$, $N = 0, 1, \dots$. По определению нормы $\|x_t\|$ из неравенства (2) следует, что для любого $N = 0, 1, \dots$

$$|x(t)| \le \frac{\|x_{t_N}\|}{R} \qquad \text{при} \quad t_N \le t \le t_{N+1}.$$

Поэтому $|x(t)|$ имеет кусочно-постоянную мажоранту $\omega : [t_0, \infty) \to \mathbb{R}_+$,

$$\omega(t) = \frac{\|x_{t_0}\|}{R^N} \qquad \text{при} \quad t_{N-1} \le t < t_N, \quad N = 0, 1, \dots ,$$

что и доказывает лемму. □

Последнее утверждение является естественным дополнением предыдущего. Таким образом, если траектория решения уравнения (1) все время находится вне конуса A_R для некоторого $R > 1$ (сколь угодно близкого к 1), то $\|x_t\| \to 0$ при $t \to \infty$.

Отметим еще одно полезное следствие лемм 2 и 3.

Следствие. *Норма $\|x_t\|$ решения уравнения* (1) *убывает, если x_t находится за пределами конуса A_1 в течении достаточно большого отрезка времени $\Delta t \ge h$. Если $x_t \notin A_1$, то x_t стремится к A_1 при неограниченном возрастании t.*

Достаточные условия устойчивости

Мы используем стандартные определения устойчивости и асимптотической устойчивости нулевого решения уравнения (1) (см., например, [1], с. 155). Теоремы об устойчивости в рамках второго метода Ляпунова предполагают существование непрерывного функционала $v : G \to \mathbb{R}$, $v(t, 0) \equiv 0$, удовлетворяющего определенным требованиям. Обычно требуется, что для всех $(\sigma, \varphi) \in G$ существует верхний предел

$$D^+ v(\sigma, \varphi) = \limsup_{\Delta t \to +0} \frac{v(\sigma + \Delta t, x_{\sigma+\Delta t}(\sigma, \varphi)) - v(\sigma, \varphi)}{\Delta t},$$

который иногда называют *верхним производным функционалом* функционала v в силу уравнения (1). Известно, что неположительность $D^+v(\sigma, \varphi)$ влечет невозрастание функционала v вдоль решения уравнения, а отрицательность — убывание.

Интересное развитие метод функционалов Ляпунова-Красовского для функционально-дифференциальных уравнений вида (1) получил в статье [3], где доказана теорема об устойчивости, показавшая, что знакоопределенность функционала Ляпунова-Красовского необходима лишь в пределах конуса $\mathcal{A}_1$. Наш подход, опирающийся на результаты предыдущего раздела, позволяет не только дать новое доказательство утверждения теоремы из [3] об устойчивости, но и существенно усилить эту теорему. Мы докажем, что для равномерности устойчивости вполне достаточно, чтобы функционал допускал бесконечно малый высший предел не в полной окрестности начала, как это требуется в [3], а лишь в конусе $\mathcal{A}_1$.

Обозначим символом $\mathcal{K}$ класс непрерывных монотонно возрастающих функций $a : \mathbb{R}_+ - \mathbb{R}_+$, уничтожающихся в нуле, $a(0) = 0$.

Теорема 1. *Пусть существуют положительное число α, функция $a \in \mathcal{K}$ и непрерывный функционал $v : \mathbb{R}_+ \times \mathcal{B}_\alpha - \mathbb{R}$, $v(t, 0) \equiv 0$, такие, что*

1) $a(|\varphi(0)|) \leq v(t, \varphi)$ *для* $t \geq 0$, $\varphi \in \mathcal{A}_1 \cap \mathcal{B}_\alpha$;

2) $D^+v(t, \varphi) \leq 0$ *для* $(t, \varphi) : v(t, \varphi) > 0$, $\varphi \in \mathcal{B}_\alpha$.

Тогда нулевое решение уравнения (1) устойчиво. Если дополнительно существует функция $b \in \mathcal{K}$ такая, что

3) $v(t, \varphi) \leq b(|\varphi(0)|)$ *для* $t \geq 0$, $\varphi \in \mathcal{A}_1 \cap \mathcal{B}_\alpha$,

то нулевое решение уравнения (1) равномерно устойчиво.

Доказательство. Фиксируем произвольно малое $\varepsilon > 0$ и некоторое $t_0 \geq 0$. Пусть φ_0 — произвольная начальная функция из области

$$\mathcal{O}_\varepsilon = \{\varphi \in C_h : v(t_0, \varphi) < a(\varepsilon)\} \cap \mathcal{B}_\varepsilon.$$

Если $\varphi_0 \notin \mathcal{A}_1$, то $\|x_t(t_0, \varphi_0)\| \leq \|\varphi_0\| < \varepsilon$ до тех пор, пока x_t не войдет в конус $\mathcal{A}_1$. Этого никогда не случится, если в начальный момент t_0 $v(t_0, \varphi_0) \leq 0$, т.к. $v(t, \varphi) > 0$ в $\mathcal{A}_1$, а $D^+v(t, \varphi) \leq 0$ в области положительности $\{v(t, \varphi) > 0\}$ функционала v.

Если $v(t_0, \varphi_0) > 0$, то $v(t, x_t) \leq v(t_0, \varphi_0) < a(\varepsilon)$ при $t \geq t_0$. При этом $\|x_t\|$ может возрастать лишь при $x_t \in \mathcal{A}_1$, где $a(|x(t)|) \leq v(t, x_t) < a(\varepsilon)$. Следовательно, $|x(t; t_0, \varphi_0)| \leq \|x_t(t_0, \varphi_0)\| < \varepsilon$ при всех $t \geq t_0$. Устойчивость доказана.

Пусть выполнено условие 3) теоремы. По заданному $\varepsilon > 0$ положим $\delta = b^{-1}(a(\varepsilon)) < \varepsilon$. Пусть $t_0 \geq 0$ и $\varphi_0 \in \mathcal{B}_\delta$. Если $\varphi_0 \in \mathcal{A}_1$ то $0 < v(t_0, \varphi_0) < b(\delta) = a(\varepsilon)$. Поскольку $D^+v \leq 0$, то $v(t, x_t) \leq v(t_0, \varphi_0) < a(\varepsilon)$ и, как было показано выше, $|x(t; t_0, \varphi_0)| < \varepsilon$ при всех $t \geq t_0$.

Пусть $\varphi_0 \notin \mathcal{A}_1$, тогда $\|x_t(t_0, \varphi_0)\| \leq \|\varphi_0\| < \delta < \varepsilon$ до тех пор, пока $x_t(t_0, \varphi_0)$ не войдет в $\mathcal{A}_1$. Если начальное значение $v(t_0, \varphi_0)$ функционала отрицательное, то $x_t(t_0, \varphi_0)$ никогда не войдет в $\mathcal{A}_1$. Пусть $v(t_0, \varphi_0) > 0$ и для некоторого $t_1 > t_0$

$|x(t_1; t_0, \varphi_0)| = \|x_{t_1}(t_0, \varphi_0)\|$, тогда при всех $t \geq t_1$

$$v(t, x_t(t_0, \varphi_0)) \leq v(t_1, x_{t_1}(t_0, \varphi_0)) \leq b(\|x_{t_1}(t_0, \varphi_0)\|) < a(\varepsilon).$$

Поэтому, как уже было показано выше, $|x(t; t_0, \varphi_0)| < \varepsilon$ при всех $t \geq t_1$. □

Теорема 2. *Пусть существуют постоянные $\alpha > 0$ и $R > 1$, функции $a, b, c \in K$ и непрерывный функционал $v : \mathbb{R}_+ \times \mathcal{B}_\alpha \to \mathbb{R}$, $v(t, 0) \equiv 0$, такие, что*

1) *$a(|\varphi(0)|) \leq v(t, \varphi) \leq b(|\varphi(0)|)$ для $t \geq 0$ и $\varphi \in \mathcal{A}_R \cap \mathcal{B}_\alpha$;*
2) *$D^+ v(t, \varphi) \leq 0$ для $(t, \varphi) : v(t, \varphi) > 0$, $\varphi \in \mathcal{B}_\alpha$;*
3) *$D^+ v(t, \varphi) \leq -c(|\varphi(0)|)$ для $t \geq 0$ и $\varphi \in \mathcal{A}_R \cap \mathcal{B}_\alpha$;*
4) *$|f(t, \varphi)| \leq M(t)$ для $(t, \varphi) : v(t, \varphi) > 0$, $\varphi \in \mathcal{B}_\alpha$, где $M : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ — суммируемая функция, такая, что для любого конечного отрезка $[r_1, r_2] \subset \mathbb{R}_+$ и некоторой постоянной $M_0 > 0$ $\int_{r_1}^{r_2} M(t)\,dt \leq M_0(r_2 - r_1)$.*

Тогда нулевое решение уравнения (1) *равномерно асимптотически устойчиво.*

Доказательство. Из теоремы 1 следует, что нулевое решение является равномерно устойчивым. Поэтому найдется $\delta > 0$ такое, что $|x(t; t_0, \varphi_0)| < \alpha$ при $t \geq t_0$ для произвольной начальной функции $\varphi_0 \in \mathcal{B}_\delta$ и любого $t_0 \geq 0$.

Предположим, что теорема не верна, тогда для некоторой начальной функции $\varphi_0 \in \mathcal{B}_\delta$ найдется положительное число η такое, что

$$\|x_t(t_0, \varphi_0)\| \geq |x(t; t_0, \varphi_0)| > \eta \quad \text{для всех} \quad t > t_0. \tag{3}$$

Если $v(t_0, \varphi_0) \leq 0$, то $v(t, x_t(t_0, \varphi_0)) \leq 0$ при всех $t > t_0$, поскольку $D^+ v(t, \varphi) \leq 0$ в области $\{v(t, \varphi) > 0\}$. Поэтому $x_t(t_0, \varphi_0) \notin \mathcal{A}_R$ при $t > t_0$, т.к. $v > 0$ в $\mathcal{A}_R$. Из леммы 3 следует, что $|x(t; t_0, \varphi_0)| \to 0$ при $t \to \infty$ равномерно по $\varphi_0 \in \mathcal{B}_\delta$ и $t_0 \geq 0$.

Таким образом, из нашего предположения следует, что $v(t_0, \varphi_0) > 0$. Обозначим $V(t) = v(t, x_t(t_0, \varphi_0))$. В силу условия 2) теоремы $V(t)$ не возрастает.

Если $\varphi_0 \notin \mathcal{A}_R$, то из леммы 3 и неравенства (3) следует, что точка $x_t(t_0, \varphi_0)$ за конечное время попадет в конус $\mathcal{A}_R$. Пусть $\tau_0 > t_0$ — первый момент входа точки $x_t(t_0, \varphi_0)$ в $\mathcal{A}_R$, тогда в силу условия 1) теоремы

$$V(t) \leq V(\tau_0) \leq b(|x(\tau_0; t_0, \varphi_0)|) < b(\delta) \quad \text{при всех} \quad t \geq \tau_0.$$

Пока $x_t \in \mathcal{A}_R$, функция $V(t)$ убывает и

$$V(t) < V(t_*) - c(\eta)(t - t_*), \tag{4}$$

где t_* — момент входа точки $x_t(t_0, \varphi_0)$ в $\mathcal{A}_R$. Отсюда следует, что суммарное время T_η пребывания траектории $x_t(t_0, \varphi_0)$ в конусе $\mathcal{A}_R$ ограничено и

$$T_\eta < \frac{b(\delta) - a(\eta)}{c(\eta)}.$$

Пусть $R_1 \in (1, R)$ и близко к 1, например, $R_1 = 1 + (R - 1)/100$. Согласно лемме 3 x_t не может находиться вне конуса $\mathcal{A}_{R_1}$ дольше интервала времени длины Δ, причем

$$\Delta < h\frac{\ln \alpha - \ln \eta}{\ln R_1}.$$

Из результатов предыдущего раздела следует, что $\|x_t(t_0, \varphi_0)\|$ убывает, если $x_t(t_0, \varphi_0)$ находится вне множества $\mathcal{A}_1$ достаточно долго, причем скорость убывания имеет положительную оценку снизу, если $x_t(t_0, \varphi_0)$ находится вне конуса $\mathcal{A}_r$ с $r > 1$.

В силу неравенства (3) $x_t(t_0, \varphi_0)$ попадет в $\mathcal{A}_1$ за конечное время. В качестве грубой оценки сверху подойдет величина $T_\eta + \Delta$.

В те промежутки времени, когда $x_t(t_0, \varphi_0) \in \mathcal{A}_1$, норма $\|x_t(t_0, \varphi_0)\| = |x(t; t_0, \varphi_0)|$ и может возрастать, но при этом сохраняется неравенство

$$a(|x(t; t_0, \varphi_0)|) \leq V(t) = v(t, x_t(t_0, \varphi_0)).$$

Предположение 4) теоремы ограничивает скорость перемещения фазовой точки x_t внутри конуса $\mathcal{A}_R$. Расстояние между границей конуса $\mathcal{A}_R$ и вложенным в него конусом $\mathcal{A}_{R_1}$ вне η-окрестности $\mathcal{B}_\eta$ в силу леммы 1 положительно. Поэтому отрезок траектории, соединяющий границы множеств $\mathcal{A}_R$ и $\mathcal{A}_{R_1}$, точка $x_t(t_0, \varphi_0)$ будет проходить в течении конечного отрезка времени, длина которого не меньше некоторого $\mu^* > 0$.

Ограниченный "ресурс" T_η будет исчерпан за конечное время и можно указать очень грубую оценку этого времени:

$$T_{max} < \frac{T_\eta}{\mu^*}(T_\eta + \Delta).$$

Поэтому точка $x_t(t_0, \varphi_0)$ войдет в η-окрестность $\mathcal{B}_\eta$ в некоторый момент $t_1 > t_0$ либо потому, что $x_{t_1}(t_0, \varphi_0) \in \mathcal{A}_R$ и $V(t_1) = v(t_1, x_{t_1}(t_0, \varphi_0)) < a(\eta)$, либо $x_{t_1}(t_0, \varphi_0) \notin \mathcal{A}_R$, но $|x(t_1; t_0, \varphi_0)| < \eta$.

Величина T_{max} ограничивает время, за которое любая траектория $x_t(\sigma, \varphi)$ с $(\sigma, \varphi) \in \mathbb{R}_+ \times \mathcal{B}_\delta$ войдет в $\mathcal{B}_\eta$. Противоречие с (3) и доказывает теорему. □

Теорема 2 показывает, что для вывода о равномерной асимптотической устойчивости достаточно, чтобы функционал $v(t, \varphi)$ допускал бесконечно малый высший предел и был определенно-положительным в конусе $\mathcal{A}_R$, а его верхняя производная $D^+v(t, \varphi)$ – неположительной во всей области $\{v(t, \varphi) > 0\}$ и определенно-отрицательной в конусе $\mathcal{A}_R$. Это означает, что подходящий функционал уже не должен монотонно убывать вдоль всех решений.

Если совсем отказаться от каких-либо ограничений на знак D^+v за пределами конуса $\mathcal{A}_R$, то взамен приходится вводить специальное условие ограниченности функционала v сверху.

Теорема 3. *Пусть существуют постоянные $\alpha > 0$, $R > 1$ и $R_1 \in [1, R]$, функция $a \in \mathcal{K}$ и непрерывный функционал $v : \mathbb{R}_+ \times \mathcal{B}_\alpha \to \mathbb{R}$, $v(t, 0) \equiv 0$, такие, что для всех $(t, \varphi) \in \mathbb{R}_+ \times (\mathcal{A}_R \cap \mathcal{B}_\alpha)$*

1) $a(|\varphi(0)|) \leq v(t, \varphi) \leq a(R_1|\varphi(0)|)$;

2) $D^+v(t, \varphi) \leq 0$.

Тогда нулевое решение уравнения (1) равномерно устойчиво.

Доказательство. Фиксируем $\varepsilon \in (0, \alpha)$ и положим $\gamma = \varepsilon/R \leq \varepsilon/R_1 < \alpha$. Пусть $t_0 \geq 0$ и $\|\varphi_0\| < \gamma$. Если $x_t = x_t(t_0, \varphi_0) \notin \mathcal{A}_R$ при всех $t \geq t_0$ то $\|x_t\| \leq \|\varphi_0\|$ и $\|x_t\| \to 0$ при $t \to \infty$.

Если x_t входит в конус $\mathcal{A}_R$ при некотором $t_1 \geq t_0$, то

$$a(|x(t)|) \leq V(t) = v(t, x_t) \leq V(t_1) \leq a(R_1|x(t_1)|) \leq a(R_1\gamma) < a(\varepsilon), \tag{5}$$

пока x_t остается в $\mathcal{A}_R$. Если $x_t \in \mathcal{A}_1$, то $\|x_t\| = |x(t)|$ и $|x(t)|$ может возрастать, но сохраняется неравенство (5).

Пусть в некоторый момент $t_2 > t_1$ x_t покидает конус $\mathcal{A}_R$. Пока x_t находится вне $\mathcal{A}_R$, то имеет место неравенство $R|x(t)| < \|x_t\| \leq \|x_{t_2}\| < \varepsilon$. Если при некотором $t_3 > t_2$ $R|x(t_3)| = \|x_{t_3}\|$, то $x_{t_3} \in \partial\mathcal{A}_R$ и в силу условия 1) теоремы

$$V(t_3) \leq a(R_1|x(t_3)|) = a\Big(R_1\frac{\|x_{t_3}\|}{R}\Big) < a\Big(\frac{R_1}{R}\varepsilon\Big) \leq a(\varepsilon). \tag{6}$$

Так специальное условие равномерной по t ограниченности функционала v сверху гарантирует оценку (6).

Как было показано выше, пока $x_t \in \mathcal{A}_R$, норма $\|x_t\|$ может возрастать, но при этом всегда $a(|x(t)|) \leq V(t) < a(\varepsilon)$. Следовательно, точка x_t может многократно покидать конус $\mathcal{A}_R$, всегда оставаясь в ε-окрестности $\mathcal{B}_\varepsilon \subset C_h$. □

Теорема 4. *Пусть выполнено условие 4) теоремы 2, существуют постоянные $\alpha > 0$, $R > 1$ и $R_1 \in [1, R]$, функции $a, c \in \mathcal{K}$ и непрерывный функционал $v : \mathbb{R}_+ \times \mathcal{B}_\alpha \to \mathbb{R}$, $v(t, 0) \equiv 0$, такие, что для всех $(t, \varphi) \in \mathbb{R}_+ \times (\mathcal{A}_R \cap \mathcal{B}_\alpha)$*

1) $a(|\varphi(0)|) \leq v(t, \varphi) \leq a(R_1|\varphi(0)|)$;

2) $D^+v(t, \varphi) \leq -c(\|\varphi\|)$.

Тогда нулевое решение уравнения (1) равномерно асимптотически устойчиво.

Доказательство. Во-первых, нулевое решение уравнения (1) равномерно устойчиво по теореме 3. Во-вторых, равномерное притяжение следует из теоремы 2 и оценки (6). В самом деле, хотя условие 2) теоремы 2 здесь формально нарушено, оно вполне компенсируется тем, что функционал v допускает бесконечно малый высший предел в специальной форме, гарантирующей неравенство (6). Из него следует, что в момент возвращения траектории x_t в конус $\mathcal{A}_R$, значение функционала на ней не превосходит значения, которое он имел на этой траектории в момент ее выхода из конуса. □

Список литературы

1. Красовский Н. Н. *Некоторые задачи теории устойчивости движения.* М.: Физматгиз, 1959. – 211 с.
2. Hale J. K., Verduyn Lunel S. M. *Introduction to Functional Differential Equations.* – New York: Springer Verlag, 1993. – 447 p.
3. Гайшун И. В., Княжище Л. Б. *Немонотонные функционалы Ляпунова. Условия устойчивости уравнений с запаздыванием* // Дифференц. уравнения. - 1994. – Т. 30, No. 8. – С. 1291 – 1298.
4. Anashkin O. *Stability Theorems for Nonlinear Functional Differential Equations* // Mathematical and Computer Modelling. – 1998. – Vol. 28, No. 2. – P. 25 – 35.

Анашкин О. В. *Достаточные условия устойчивости и неустойчивости для одного класса нелинейных функционально-дифференциальных уравнений* // Дифференц. уравнения. – 1998. Т. 34, No. 7. С. 867 – 876.

Анашкин О. В. *Об одном методе исследования на устойчивость в теории функционально-дифференциальных уравнений* // Ученые записки СГУ. 1998. - No. 7(46). С. 54 - 56.