О СПЕКТРЕ ОДНОЙ ГИДРОДИНАМИЧЕСКОЙ ЗАДАЧИ

Вронский Б. М. ассистент

1. Постановка задачи. Пусть неподвижный контейнер, занимающий область $\Omega \in R^3$ заполнен двумя жидкостями: вязкой несжимаемой и идеальной сжимаемой. Обозначим через Ω_1 область, занятую вязкой жидкостью, Ω_2 область, занятую идеальной, Γ границу раздела (идеальная находится выше вязкой), S_1 и S_2 соответствующие твердые стенки. Предполагается, что система находится под действием силы тяжести .

Малые движения системы описываются следующими уравнениями:

$$\frac{\partial \bar{v}_1}{\partial t} = -\frac{1}{\rho_1}\nabla p_1 + \frac{1}{\rho_1}\mu\,\Delta \bar{v}_1, \ \operatorname{div}\bar{v}_1 = 0 \quad (\bar{x} \in \Omega_1); \tag{1}$$

$$\frac{\partial \bar{v}_2}{\partial t} = -\frac{1}{\rho_2}\nabla p_2; \qquad \frac{\partial}{\partial t} p_2 + c^2\rho_2 \operatorname{div}\bar{v}_2 = 0 \quad (\bar{x} \in \Omega_2); \tag{2}$$

$$\bar{v}_1 = 0 \quad (\bar{x} \in S_1), \ \bar{v}_2 \cdot \bar{n} = 0 \quad (\bar{x} \in S_2); \tag{3}$$

$$\bar{v}_1 \cdot \bar{n} = \bar{v}_2 \cdot \bar{n} \equiv \varsigma \ , \ \tau_{j3}(\bar{v}_1) = 0\,(\Gamma), \ j = 1,2. \tag{4}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\tau_{33}(\bar{v}_1) + p_2\right) + g\,\Delta\rho\varsigma = 0 \quad (\bar{x} \in \Gamma); \tag{5}$$

$$\bar{v}_j(\bar{x},0) = \bar{v}_j^0(\bar{x}); \ p_j(\bar{x},0) = p_j^0(\bar{x}), \quad j = 1,2. \tag{6}$$

Здесь $\bar{v}_j(\bar{x},t)$ – поля скоростей j-й жидкости, $p_j(\bar{x},t)$ - отклонения полей давлений от равновесных значений, c – скорость звука в сжимаемой жидкости, μ – коэффициент динамической вязкости, $\Delta\rho$ – скачок плотности на границе раздела Γ. Условие $\Delta\rho > 0$ гарантирует устойчивость состояния покоя рассматриваемой гидросистемы.

Через τ_{ij} обозначены компоненты тензора напряжений в вязкой жидкости. Они находятся по формулам:

$$\tau_{ij}(\bar{v}_1) = -p_1\delta_{ij} + \mu\left(\frac{\partial \bar{v}_{1i}}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{v}_{1j}}{\partial x_i}\right), \quad i,j = 1,2,3.$$

где p_1 – давление в вязкой жидкости, δ_{ij} – символ Кронекера, $x = (x_1, x_2, x_3)$.

Из условия соленоидальности поля $\bar{v}_1$ следует, что

$$\int_{\Gamma} \varsigma \, d\Gamma = 0 .$$

Для достаточно гладких соленоидальных полей, удовлетворяющих условию $\bar{v} = 0$ на твердой стенке S_1 и условиям $\tau_{13}(\bar{v}) = \tau_{23}(\bar{v}) = 0$ на Γ имеет место формула Грина:

$$\int_{\Omega_1} (-\mu \Delta \bar{u} + \nabla p) \cdot \bar{v} \, d\Omega = \mu E(\bar{u}, \bar{v}) - \int_{\Gamma} \tau_{33}(\bar{u}) v_z \, d\Gamma \tag{7}$$

где $E(\bar{u}, \bar{v})$ – билинейный функционал

$$E(\bar{u}, \bar{v}) = \frac{1}{2} \int_{\Omega_1} \sum_{i,j=1}^{3} \left(\frac{\partial \bar{u}_{1i}}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_{1j}}{\partial x_i} \right) \left(\frac{\partial \bar{v}_{1i}}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{v}_{1j}}{\partial x_i} \right) d\Omega . \tag{8}$$

связанный со скоростью диссипации энергии в вязкой жидкости.

2. Нормальные колебания. Далее мы будем рассматривать нормальные колебания системы, то есть решения задачи (1)–(6), зависящие от времени по закону $\{\bar{v}_i(\bar{x}, t), p(\bar{x}, t)\} = \exp(-\lambda t) \{\bar{v}_i(\bar{x}), p_i(\bar{x})\}$, где $\lambda \in C$ – комплексный декремент затухания.

Из первого уравнения (2) следует, что функцию $\bar{v}_2$ можно искать в виде $\bar{v}_2 = \nabla \Phi$, где $\Phi(\bar{x})$ некоторая скалярная функция. В результате приходим к следующей спектральной задаче:

$$\lambda v_1 = \frac{1}{\rho_1} (-\mu \Delta \bar{v}_1 + \nabla p_1), \quad \bar{v}_1 = 0, \; \operatorname{div} \bar{v}_1 = 0. \qquad (\bar{x} \in \Omega_1), \tag{9}$$

$$p_2 = \lambda \rho_2 \Phi_2, \qquad \Delta \Phi = \lambda^2 c^{-2} \Phi, \; (\bar{x} \in \Omega_2), \tag{10}$$

$$v_1 = 0 \qquad (\bar{x} \in S_1), \qquad \nabla \Phi \cdot \bar{n} = 0 \qquad (\bar{x} \in S_2), \tag{11}$$

$$\bar{v}_1 \cdot \bar{n} = \nabla \Phi \cdot \bar{n} = \varsigma \qquad (\bar{x} \in \Gamma), \qquad \tau_{13}(\bar{v}_1) = \tau_{23}(\bar{v}_1) = 0 \qquad (\bar{x} \in \Gamma), \tag{12}$$

$$\lambda (\tau_{33}(\bar{v}_1) + \lambda \rho_2 \Phi) = g \Delta \rho \varsigma \qquad (\bar{x} \in \Gamma), \tag{13}$$

$$\int_{\Omega_2} \Phi \, d\Omega = 0 . \tag{14}$$

Пользуясь формулой (7), легко показать, что $\operatorname{Re} \lambda \geq 0$, то есть спектр исследуемой задачи лежит в правой полуплоскости.

3. Вспомогательные краевые задачи. Для приведения исследуемой спектральной задачи к операторной форме рассмотрим ряд вспомогательных краевых задач.

Задача 1. Найти функцию $\Phi_1 \in H^1(\Omega_2)$, такую, что

$$\Delta \Phi_1 = f \quad (\bar{x} \in \Omega_2), \quad \nabla \Phi_1 \cdot \bar{n} = 0 \quad (\bar{x} \in \Gamma \cup S_2), \qquad \int_{\Omega_2} f \, d\Omega = 0.$$

Решение этой задачи может быть записано в виде $\Phi_1 = -A^{-1} f$, где оператор A, действующий в пространстве $L_2(\Omega_2)$, самосопряженный, положительно определенный с дискретным спектром, обратный к нему – положительный и вполне непрерывный $A^{-1} \in \sigma_p \ (p \geq \frac{3}{2})$, его собственные значения имеют асимптотику: $\lambda_k(A^{-1}) = c_A \ k^{-\frac{2}{3}}(1+o(1))$ при $k \to \infty$, $c_A \geq 0$.

Задача 2. Найти функцию $\Phi_2 \in H^1(\Omega_2)$, такую, что

$$\Delta\Phi_2 = 0 \quad (\bar{x} \in \Omega_2), \quad \nabla\Phi_2 \cdot \bar{n} = 0 \quad (\bar{x} \in S_2), \quad \nabla\Phi \cdot \bar{n} = -\phi \quad (\bar{x} \in \Gamma), \quad \int_\Gamma \phi \ d\Gamma = 0.$$

Решение записывается в виде $\Phi_2 = T\phi$, где T – линейный ограниченный оператор, действующий из $H_- = H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$ в $H^1(\Omega_2)$.

Кроме того введем оператор взятия следа γ, действующий по правилу $\gamma\,\Phi\,|_{\Omega_2} = \Phi\,|_\Gamma$, $\gamma : H^1(\Omega_2) \to H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$ и оператор $C = \gamma\,T$, рассматриваемый как оператор, действующий в пространстве $H_0 = L_2(\Gamma)\Theta\{1\}$, он оказывается положительным вполне непрерывным из класса $\sigma_p \ (p > 2)$.

Задача 3. По заданной найти функцию $\bar{u}_1 \in \overline{W}_2^1(\Omega_1)$, такую, что $\rho_1^{-1}(-\mu\,\Delta\bar{u}_1 + \nabla p_1') = \bar{f} \ (\bar{x} \in \Omega_1)$; $\operatorname{div} \bar{u}_1 = 0 \ (\bar{x} \in \Omega_1)$, $\bar{u}_1 = 0 \ (\bar{x} \in S_1)$, $\tau_{j3}(\bar{u}_1) = 0 \ (\bar{x} \in \Gamma)$, $j = 1,2,3$.

Обобщенное решение этой задачи может быть записано в виде $\mu\,\bar{u}_1 = P^{-1}\bar{f}$, где оператор P, действующий в пространстве $\bar{J}(\Omega_1)$ самосопряжен и положительно определен, при этом $P^{-1} \in \sigma_p$ $(p > \frac{3}{2})$, $P^{-1} > 0$ и его собственные значения имеют асимптотику

$$\lambda_k(P^{-1}) = c_P\,k^{-\frac{2}{3}}(1+o(1)), \ k \to \infty.$$

Для функций из $\overline{W}_2^1(\Omega_1)$ введем оператор G, действующий по правилу $G\bar{u} = u_z\,|_\Gamma$.

Задача 4. По заданной $\psi(\bar{x}) \in H_0$ найти функцию $\bar{w}_1 \in \overline{W}_2^1(\Omega_1)$, такую, что $-\mu\,\Delta\bar{w}_1 + \nabla p_1'' = 0$, $\operatorname{div}\bar{w}_1 = 0 \ (\bar{x} \in \Omega_1)$; $w_1 = 0 \ (\bar{x} \in S_1)$, $\tau_{j3}(\bar{w}_1) = 0 \ (\bar{x} \in \Gamma)$, $j = 1,2$; $\tau_{33}(\bar{w}_1) = \mu\psi \ (\bar{x} \in \Gamma)$.

Обобщенное решение этой задачи может быть записано в виде $\bar{w}_1 = Q\psi$, где Q – линейный ограниченный оператор, действующий из H_- в $\overline{W}_2^1(\Omega_1)$.

4. Переход к системе операторных уравнений. С помощью введенных операторов можно перейти от задачи (9) – (14) к системе операторных уравнений следующего вида:

$$\mu\psi = \lambda\,\rho_1 P^{-1}\psi + \frac{1}{\lambda}\, g\Delta\rho\, P^{\frac{1}{2}} Q G P^{-\frac{1}{2}}\psi - \lambda\,\rho_2\, P^{\frac{1}{2}} Q\gamma\, A^{-\frac{1}{2}}\phi\,. \tag{15}$$

$$c^2\phi = -\lambda^2 A^{-1}\phi - \lambda^2 A^{\frac{1}{2}} T G P^{-\frac{1}{2}}\psi\,. \tag{16}$$

где $\quad \bar{v}_1 = P^{-\frac{1}{2}}\psi\,,\ \Phi_1 - TG\bar{v}_1 = A^{-\frac{1}{2}}\phi\,.$

В дальнейшем используем следующие обозначения для входящих в систему (15) – (16) операторов: $H = P^{\frac{1}{2}} Q,\ H^* = G P^{-\frac{1}{2}},\ Y = -\gamma\, A^{-\frac{1}{2}},\ Y^* = A^{\frac{1}{2}} T$.

Относительно них справедливо следующее утверждение:

1) Операторы H и H^* взаимно сопряженные вполне непрерывные операторы конечного порядка, при этом $H: H_0 \to \bar{J}(\Omega_1)$, $H^*: \bar{J}(\Omega_1) \to H_0$.

2) Операторы Y и Y^* взаимно сопряженные вполне непрерывные операторы конечного порядка, при этом $Y: L_2(\Omega_2) \to H_0$, $Y^*: H_0 \to L_2(\Omega_2)$.

Таким образом, исследуемую спектральную задачу можно записать в виде

$L(\lambda)\hat{z} = 0, \qquad \hat{z} = (\phi, \psi)^t \in J(\Omega_1) \oplus L_2(\Omega_2)$,

где оператор-функция $L(\lambda)$ задается формулой

$$L(\lambda) = \begin{pmatrix} \mu I & 0 \\ 0 & \rho_2 c^2 I \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} \rho_1 P^{-1} & \rho_2 HY \\ 0 & 0 \end{pmatrix} +$$

$$+\lambda^2 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \rho_2 A^{-1} \end{pmatrix} - \frac{1}{\lambda} \begin{pmatrix} g\Delta\rho\, HH^* & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ Y^* H^* & 0 \end{pmatrix} \tag{17}$$

ТЕОРЕМА 1. Спектр исследуемой задачи состоит из не более чем счетного множества конечнократных собственных значений с возможными предельными точками $\lambda = 0$ и $\lambda = \infty$, расположенных в правой полуплоскости симметрично вещественной оси.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО следует из того, что все операторы, входящие в $L(\lambda)$, за исключением $\operatorname{diag}\left(\mu I, \rho_2 c^2 I\right)$ компактны и теоремы М.В.Келдыша.

5. Локализация спектра и асимптотика собственных значений. Введем в рассмотрение две области комплексного переменного:

$$\Theta_1(\varepsilon, R) = \{\lambda : |\lambda| > R; \frac{\pi}{2} - \varepsilon < \arg\lambda | < \frac{\pi}{2} + \varepsilon\},$$

$$\Theta_2(\varepsilon, R) = \{\lambda : |\lambda| > R; \pi - \varepsilon < |\arg\lambda| < \varepsilon\}$$

Пусть сначала $\lambda \in \Theta_2(\varepsilon, R)$. В этом случае задача (14)-(15) может быть приведена к следующему виду:

$$l_1(\lambda)\psi = 0 \qquad ,$$

где $l_1(\lambda) = \mu I - \lambda\rho_1 P^{-1} + G_1(\lambda)$, а оператор-функция $G_1(\lambda)$ определена равенством:

$G_1(\lambda) = -\frac{1}{\lambda} g\Delta\rho B + \lambda\rho_2 HY(c^2 I + \lambda^2 A^{-1})^{-1} H^* Y^*$. Можно показать, что $G_1(\lambda) = o(1)$ при $\lambda \to \infty$ и $\lambda \in \Theta_2$. Применяя теперь известные результаты А.С.Маркуса и М.Б.Оразова получим, что собственные значения оператор-функции $l_1(\lambda)$ имеют следующее асимптотическое поведение:

$$\lambda_k^{-} = \mu\rho_1^{-1}\lambda_k(P^{1})(1 + o(1)), \; k \to \infty . \tag{18}$$

Аналогично при $\lambda \in \Theta_1(\varepsilon, R)$ задача (14)-(15) может быть приведена казначее на собственные значения для оператор-функции

$$l_2(\lambda)\phi = 0,$$

где $l_2(\lambda) = c^2 I + \lambda^2 A^{-1} + G_2(\lambda)$, а оператор-функция $G_2(\lambda)$ определяется равенством $G_2(\lambda) = \lambda Y^* H^*(\mu I - \lambda\rho_1 P^{-1} - \frac{1}{\lambda} g\Delta\rho B)HY$. Можно показать, что $G_2(\lambda) = o(\lambda)$ при $\lambda \to \infty$ и $\lambda \in \Theta_1$. На основании тех же результатов получим, что собственные значения оператор-функции $l_2(\lambda)$ имеют следующее асимптотическое поведение:

$$\lambda_k^{\pm} = \pm ic(\lambda_k(A))^{\frac{1}{2}}(1 + o(1)) \text{ при } k \to \infty . \tag{19}$$

Рассмотрим, наконец, задачу (14)-(15) при $\lambda \in (-c\sqrt{\lambda_1(A)}; c\sqrt{\lambda_1(A)})$, где $\lambda_1(A)$ первое (наименьшее) собственное значение оператора A. В этом случае задача может быть приведена к задаче:

$$l_3(\lambda)\psi = (\mu\lambda I - g\Delta\rho B + \lambda^2 F(\lambda))\psi = 0,$$

где а оператор-функция $F(\lambda)$ определена равенством:

$$F(\lambda) = \rho_1 P^{-1} + \rho_2 c^2 HY(c^2 I + \lambda^2 A^{-1})^{-1} Y^* H^*;$$

при этом $F(\lambda)$ принимает значения на множестве самосопряженных компактных операторов и аналитична в окрестности нуля. Можно показать, что $0 \le B \in \sigma_p\left(p > 2\right)$, а его собственные значения имеют асимптотику: $\lambda_k(B) = c_B k^{-\frac{1}{2}}(1+o(1)) \quad (k \to \infty)$. Снова воспользовавшись результатами А.С.Маркуса, приходим к выводу о том, что собственные значения оператор-функции $l_3(\lambda)$ имеют асимптотическое поведение:

$$\lambda_k^0 = \mu(g\Delta\rho)^{-1}\lambda(B)\big(1+o(1)\big) \qquad (k \to \infty) \quad . \tag{20}$$

ТЕОРЕМА 2. Спектр исследуемой задачи состоит из четырех последовательностей собственных значений, асимптотическое поведение которых описывается формулами (18) (20).