ПОЛЯРИЗУЕМОСТЬ ТОНКОГО ЦИЛИНДРИЧЕСКОГО ПРОВОДНИКА В КВАЗИСТАТИЧЕСКОМ ПОЛЕ

Пономаренко В. И., доктор физико-математических наук, профессор

Развитие техники сверхвысоких частот требует создания новых радиотехнических материалов, в частности, поглощающих электромагнитные волны [1]. Наиболее эффективные радиопоглощающие материалы – искусственные диэлектрики – представляют собой радиопоглощающие частицы типа ферритового порошка, углеродных и металлических волокон и т.п., распределенные в некотором связующем. Для моделирования радиофизических характеристик искусственных материалов необходимо знание поляризуемости частиц – включений, что требует решения соответствующей электродинамической задачи. Такое решение известно для эллипсоидальных частиц, но не получено для цилиндрических проводящих элементов, часто используемых на практике в качестве наполнителя.

Установление связи между поляризуемостью цилиндрической частицы и такими ее характеристиками, как проводимость и магнитная проницаемость актуально также в плане измерения этих величин резонаторными методами для таких, например, материалов, как аморфные микропровода [2].

Целью настоящей работы является расчет поляризуемости отрезка тонкого провода радиуса a и длиной $2h$, обладающего проводимостью σ и магнитной проницаемостью μ, помещенного в продольное квазистатическое электрическое поле, зависящее от времени по закону $\exp(-i\omega t)$ и имеющее амплитуду E_0.

Комплексное погонное сопротивление провода имеет вид:

$$Z = \frac{k}{2\pi a\sigma}\frac{J_0(ka)}{J_1(ka)}, \qquad k = \sqrt{i\omega\sigma\mu}, \tag{1}$$

где $J_{0,1}$ – функции Бесселя, i – мнимая единица. Ввиду условия тонкости можно использовать принятое при расчете излучения и рассеяния волн тонкими вибраторами соотношение:

$$I(x) = \frac{1}{Z}E_\tau(x), \tag{2}$$

где x – координата вдоль отрезка проводника, отсчитываемая от его середины, I – текущий по нему ток, E_τ – значение составляющей электрического поля вдоль оси X на поверхности проводника.

Примечание. Соотношение (2) выполняется точно для бесконечно длинного проводника. В случае конечной длины оно имеет приближенный характер ввиду влияния концов, причем его точность тем выше, чем меньше отношение a/h, поскольку краевой эффект существенен лишь в прилежащих к концам проводника участкам протяженностью порядка диаметра.

Поле E_τ складывается из внешнего поля E_0 и поля $\widetilde{E}(x)$, создаваемого зарядами на проводнике,

$$E_\tau(x) = E_0 + \widetilde{E}(x). \tag{3}$$

Ввиду тонкости проводника объемное распределение токов и зарядов можно аппроксимировать линейным и вычислить $\widetilde{E}$ по формуле

$$\widetilde{E}(x) = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\int_{-h}^{h}\frac{(x-y)\rho(y)dy}{\left[(x-y)^2+a^2\right]^{3/2}}, \tag{4}$$

где ε – абсолютная диэлектрическая проницаемость среды, окружающей проводник, ρ – линейная плотность зарядов на нем. Подстановка (3), (4) в (2) приводит к уравнению, которое можно преобразовать в интегральное уравнение относительно функции тока $I(x)$, если учесть связь [3]:

$$I(x) = -i\omega\int_{x}^{h}\rho(x)dx, \qquad \rho(x) = \frac{1}{i\omega}\frac{dI}{dx}. \tag{5}$$

Из (4), (5) после интегрирования по частям с учетом условия $I(\pm h) = 0$ и замены переменных

$$\theta = x/h, \quad S = y/h, \quad J(\theta) = I(h\theta)Z/E_0 \tag{6}$$

получим интегральное уравнение Фредгольма второго рода:

$$J(\theta) = 1 + \lambda\int_{-1}^{1}K(S,\theta)J(S)dS, \tag{7}$$

$$K(S,\theta) = \left[\kappa^2 - 2(S-\theta)^2\right] / \left[(S-\theta)^2+\kappa^2\right]^{5/2}, \tag{8}$$

$$\kappa = a/h, \quad \lambda^{-1} = 4\pi i\omega\varepsilon h^2 Z. \tag{9}$$

Для поляризуемости α, равной отношению амплитуды дипольного момента цилиндра к амплитуде внешнего поля, имеем

$$\alpha = \frac{2}{E_0}\int_0^h x\rho(x)dx = \gamma\int_0^1 J(x)dx, \quad \gamma = \frac{2ih}{\omega Z}. \tag{10}$$

Численное решение интегрального уравнения (7) проводилось методом квадратурных формул. Достаточное для достижения графической точности число точек разбиения отрезка интегрирования составило $40-60$ при значениях $h \sim 1\,мм$, $a \sim 10\,мкм$. Численные расчеты показали сильную зависимость поляризуемости от длины проводника, $\alpha \sim h^3$. Зависимость поляризуемости от импеданса при его изменении в широких пределах оказалась весьма слабой.

Анализ распределения тока вдоль проводника, полученного из решения уравнения (7), показал, что зависимость $J(S)$ можно приближенно аппроксимировать следующим образом:

$$J(S) = A(1-S^2), \tag{11}$$

где A - постоянная. Подставляя (11) в (7) и полагая $\theta = 0$, получим после выполнения интегрирования и простых преобразований:

$$A = \left[1 - 4\lambda\left(\ln\frac{2}{\kappa} - 1\right)\right]^{-1}. \tag{12}$$

Для поляризуемости с учетом (11), (12) находим из (10):

$$\alpha = \frac{2}{3}\gamma \bigg/ \left[1 - 4\lambda\left(\ln\frac{2}{\kappa} - 1\right)\right]. \tag{13}$$

С целью проверки приближенной формулы (13) результаты расчетов по ней сравнивались с результатами, полученными путем решения уравнения (7) и использования формулы (10). Сравнение показало, что расхождение не превышает $\approx 10\%$ как для действительной, так и для мнимой части поляризуемости α. Например, при $\mu = (3+6i)\mu_0$, $a = 4\,мкм$, $2h = 1{,}5\,мм$, $\sigma = 0{,}474\cdot10^6$ единиц СИ и при частоте $f = 8{,}8\,ГГц$ получено из (7), (10) $\alpha = 0{,}357\cdot10^{-20} + 0{,}310\cdot10^{-22}\,i$, тогда как из (13) следует $\alpha = 0{,}317\cdot10^{-20} + 0{,}318\cdot10^{-22}\,i$. Через μ_0 обозначена магнитная проницаемость вакуума.

Литература.

1. Пономаренко В.И., Бержанский В.Н., Хлыстов А.С., Тимошенко А.М. Актуальные проблемы исследований и создания поглотителей электромагнитных волн.// Ученые записки Симферопольского государственного университета, № 2, 1995, г.Симферополь.
2. Пономаренко В.И., Бержанский В.Н., Дзедолик И.В., Кокоз В.Л., Васильев Ю.М., Торкунов А.В. Волноводный метод измерения магнитной проницаемости металлов на СВЧ... Изв. вузов. Радиоэлектроника. – 1989. – №3, – С. 38-40.
3. Пономаренко В.И. Проводящая ленточная решетка в квазистатическом поле. // Изв. вузов. Электромеханика. – 1982. – № 5. – С. 518-523.