

АНАЛИЗ ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ В ТРЕХМЕРНОЙ ЗАДАЧЕ КИРША

Королев К. А., аспирант

Локальное возмущение одноосного напряженного состояния поперечным круговым отверстием исследовано Киршем [1] в двумерной постановке. В трехмерной постановке она изучалась в работах Гринченко В. Т. и Улитко А. Ф. [2,3], Космодамианского А. С. и Шалдырвана В. А. [4].

Трехмерная краевая задача об одноосном растяжении слоя с поперечным круговым цилиндрическим отверстием имеет точное аналитическое решение в частном случае нулевого коэффициента Пуассона ν . Оно совпадает с решением плоской задачи Кирша при $\nu = 0$. Поле смещений в общем случае ($\nu \neq 0$) представляется суммой решения задачи Кирша для обобщенного плоского напряженного состояния и дополнительных смещений пропорциональных коэффициенту Пуассона.

$$\begin{aligned} \frac{4G}{\sigma \rho_0} u &= \frac{1-\nu}{1+\nu} r + \frac{1}{r} + \left(r + \frac{4}{r} (1-\nu) - \frac{1}{r^3} + \nu f_u \right) \cos(2\theta), \\ \frac{4G}{\sigma \rho_0} v &= \left(-r - \frac{2}{r} (1-2\nu) - \frac{1}{r^3} + \nu f_v \right) \sin(2\theta), \\ \frac{4G}{\sigma \rho_0} w &= -\frac{2\nu}{1+\nu} z + \nu f_w \cos(2\theta). \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь u, v, w — составляющие вектора смещения в цилиндрических координатах (r, θ, z) ; ρ_0 — радиус отверстия; G — модуль сдвига; σ — растягивающее напряжение.

Граничные условия на цилиндрической поверхности:

$$g_{rr}|_{r=1} = 0, \quad g_{r\theta}|_{r=1} = 0, \quad g_{zr}|_{r=1} = 0 \quad (2)$$

Граничные условия на лицевых плоскостях:

$$g_{zz}|_{z=\pm h} = \frac{4}{r^2}, \quad g_{\theta z}|_{z=\pm h} = 0, \quad g_{zr}|_{z=\pm h} = 0 \quad (3)$$

Согласно работе [3], дополнительные смещения f_u, f_v, f_w представляются в виде:

$$\begin{aligned} f_u &= \frac{h}{4} \int_0^\infty x(\lambda) \left[z \sinh(\lambda z) + \left(\frac{1-2\nu}{\lambda} - h \coth(\lambda h) \right) \cosh(\lambda z) \right] \frac{\partial}{\partial r} N(\lambda, r) \frac{d\lambda}{\lambda \sinh(\lambda h)} + \\ &+ \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left\{ \left[\left(r + \frac{4}{\alpha_n^2 r} \right) K_2(\alpha_n r) - \left(2 \frac{1-\nu}{\alpha_n} + \frac{4 + \alpha_n^2 t_n^2}{\alpha_n} \right) K_2'(\alpha_n r) \right] \frac{P_n}{2\alpha_n K_2'(\alpha_n)} + \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \left[t_n K_2'(\alpha_n r) - \frac{2}{\alpha_n r} K_2(\alpha_n r) \right] \frac{Q_n}{\alpha_n^3 K_2(\alpha_n)} \left\} \cos(\alpha_n z) + \nu P_0 \frac{1-\nu}{r} \right. \\
 f_v = & - \frac{h}{2r} \int_0^\infty x(\lambda) \left[z \sinh(\lambda z) + \left(\frac{1-2\nu}{\lambda} - h \coth(\lambda h) \right) \cosh(\lambda z) \right] N(\lambda, r) \frac{d\lambda}{\lambda \sinh(\lambda h)} + \\
 & + \sum_{n=1}^\infty (-1)^n \left\{ \left[\left(2 \frac{1-\nu}{\alpha_n} + \frac{4+\alpha_n^2}{\alpha_n} t_n^2 \right) \frac{1}{r} K_2(\alpha_n r) - K_2'(\alpha_n r) \right] \frac{P_n}{\alpha_n^2 K_2'(\alpha_n)} + \right. \\
 & + \left. \left[K_2'(\alpha_n r) - \frac{2t_n}{\alpha_n r} K_2(\alpha_n r) \right] \frac{Q_n}{\alpha_n^3 K_2(\alpha_n)} \right\} \cos(\alpha_n z) - \nu P_0 \frac{1-2\nu}{2r} \\
 f_w = & \frac{h}{4} \int_0^\infty x(\lambda) \left[z \cosh(\lambda z) - \left(2 \frac{1-\nu}{\lambda} + h \coth(\lambda h) \right) \sinh(\lambda z) \right] N(\lambda, r) \frac{d\lambda}{\sinh(\lambda h)} + \\
 & + \sum_{n=1}^\infty (-1)^n \left\{ \left[\left(2 \frac{\nu-1}{\alpha_n} + \frac{4+\alpha_n^2}{\alpha_n} t_n \right) K_2(\alpha_n r) - r K_2'(\alpha_n r) \right] \frac{P_n}{2\alpha_n K_2(\alpha_n)} - \right. \\
 & \left. - t_n K_2(\alpha_n r) \frac{Q_n}{\alpha_n^3 K_2(\alpha_n)} \right\} \sin(\alpha_n z)
 \end{aligned} \tag{4}$$

где $x(\lambda)$ — неизвестная плотность; P_n, Q_n — произвольные постоянные; $\alpha_n = n\pi/h$;

$$N(\lambda, r) = \frac{2}{\pi\lambda} \frac{J_2(\lambda r) Y_2'(\lambda) - Y_2(\lambda r) J_2'(\lambda)}{\left[Y_2'(\lambda) \right]^2 + \left[J_2'(\lambda) \right]^2}, \tag{5}$$

$t_n = \alpha_n^{-1} K_2(\alpha_n)/K_2'(\alpha_n)$; $K_2(\lambda), J_2(\lambda), Y_2(\lambda)$ - цилиндрические функции.

По методу, описанному в работах [2,3] для определения функции $x(\lambda)$ и постоянных P_n, Q_n из граничных условий получена бесконечная система линейных интегральных уравнений:

$$a_1(\alpha_n) P_n + b_1(\alpha_n) Q_n - \alpha_n^2 \int_0^\infty x(\lambda) \frac{N(\lambda, 1)}{(\alpha_n^2 + \lambda^2)^2} \lambda d\lambda = 0, \quad (n \in \mathbb{N})$$

$$P_0 + 2 \int_0^\infty x(\lambda) N(\lambda, 1) \frac{d\lambda}{\lambda^3} = 0 \tag{6}$$

$$a_1(\alpha_n) P_n + b_1(\alpha_n) Q_n + 2\alpha_n^2 \int_0^\infty x(\lambda) \frac{N(\lambda, 1)}{(\alpha_n^2 + \lambda^2)^2} \frac{d\lambda}{\lambda} - 2\nu \int_0^\infty x(\lambda) \frac{N(\lambda, 1)}{\alpha_n^2 + \lambda^2} \frac{d\lambda}{\lambda} = 0, \quad (n \in \mathbb{N})$$

$$x(\lambda) \left[\operatorname{cth}(\lambda h) + \frac{\lambda h}{\operatorname{sh}^2(\lambda h)} \right] = \frac{4}{h} \sum_{n=1}^\infty \left(\frac{\lambda^3 P_n}{(\alpha_n^2 + \lambda^2)^2} + \frac{\lambda Q_n}{\alpha_n^2 (\alpha_n^2 + \lambda^2)} \right) - 8 \frac{\nu^2 P_0 + 4}{\lambda h} \tag{7}$$

$$\text{Здесь } a_1(\alpha_n) = \frac{1}{2} - 3 \frac{1-\nu}{\alpha_n^2} - \frac{\alpha_n^2 + 4}{2} t_n^2, \quad b_1(\alpha_n) = \frac{t_n - 1}{\alpha_n^2} - \frac{3}{\alpha_n^4}$$

$$a_2(\alpha_n) = \frac{1}{\alpha_n^2} \left[-2\nu - 2(1-\nu)t_n - (\alpha_n^2 + 4)t_n^2 \right] \quad b_2(\alpha_n) = \frac{1}{\alpha_n^4} \left[\frac{1}{2} \alpha_n^2 + 2 + 2t_n - \frac{1}{t_n} \right]$$

Система уравнений (6),(7) представляет собой бесконечную систему интегральных уравнений.

В работах [2,3] доказаны предельные свойства неизвестных:

$$\exists \lim_{\lambda \rightarrow \infty} x(\lambda) = P; \quad \exists \lim_{n \rightarrow \infty} P_n = P \neq 0 \quad (8)$$

Поскольку предельное значение функции $x(\lambda)$ с допускаемой погрешностью достигается начиная с некоторого значения $\lambda = T$, то можно упростить вычисление несобственных интегралов в

$$(6). \text{ Например, } \int_0^{\infty} \frac{N(\lambda,1)}{(\alpha_n^2 + \lambda^2)^2} x(\lambda) \lambda d\lambda = \int_0^T \frac{N(\lambda,1)}{(\alpha_n^2 + \lambda^2)^2} (x(\lambda) - P) \lambda d\lambda + P \int_0^{\infty} \frac{N(\lambda,1)}{(\alpha_n^2 + \lambda^2)^2} \lambda d\lambda. \quad (9)$$

Оставшийся несобственный интеграл можно вычислить аналитически. Аналогично, в выражении для неизвестной функции $x(\lambda)$ (7), все бесконечные суммы приводятся к конечным, и система (6), (7) преобразуется к виду:

$$a_1(\alpha_n)P_n + b_1(\alpha_n)Q_n - \alpha_n^2 \int_0^T \frac{(x(\lambda) - P) N(\lambda,1)}{(\alpha_n^2 + \lambda^2)^2} \lambda d\lambda + \left(\frac{4 + \alpha_n^2}{2} t_n^2 - \frac{1}{2} \right) P = 0, \quad (n \in \mathbb{N})$$

$$P_0 + 2 \int_0^T x(\lambda) N(\lambda,1) \frac{d\lambda}{\lambda^3} + \frac{1}{4} P = 0 \quad (10)$$

$$a_1(\alpha_n)P_n + b_1(\alpha_n)Q_n + \left(2t_n \frac{1-\nu}{\alpha_n^2} + \frac{4 + \alpha_n^2}{\alpha_n^2} t_n^2 - \frac{\nu}{\alpha_n^2} \right) P +$$

$$+ 2\alpha_n^2 \int_0^T x(\lambda) \frac{N(\lambda,1)}{(\alpha_n^2 + \lambda^2)^2} \frac{d\lambda}{\lambda} - 2\nu \int_0^T x(\lambda) \frac{N(\lambda,1)}{\alpha_n^2 + \lambda^2} \frac{d\lambda}{\lambda} = 0,$$

$$x(\lambda) \left[cth(\lambda h) + \frac{\lambda h}{sh^2(\lambda h)} \right] = \frac{4\lambda^3}{h} \sum_{n=1}^{K-1} \frac{P_n - P}{(\alpha_n^2 + \lambda^2)^2} + \frac{4\lambda}{h} \sum_{n=1}^{N-1} \frac{Q_n - Q}{\alpha_n^2 (\alpha_n^2 + \lambda^2)} +$$

$$+ \left[cth(\lambda h) + \frac{\lambda h}{sh^2(\lambda h)} - \frac{2}{\lambda h} \right] P - \frac{2}{\lambda^2} \left[cth(\lambda h) + \frac{\lambda h}{3} - \frac{1}{\lambda h} \right] Q - \frac{8}{\lambda h} (4 + \nu^2 P_0) \quad (11)$$

Полученная система может решаться на ЭВМ методом последовательных приближений. На каждом шаге метода необходимо численно вычислять значения $4 \cdot N$ интегралов на интервале $[0, T]$ Дополнительными преобразованиями интегральных выражений можно увеличить точность и скорость вычислений. Для этого приближенно заменим множитель $\left[cth(\lambda h) + \frac{\lambda h}{sh^2(\lambda h)} \right]$ в уравнении

(7) на единицу, начиная с $\lambda = t_0$.

При этом интеграл
$$\int_{t_0}^T \frac{N(\lambda,1)}{(\alpha_n^2 + \lambda^2)^2} (x(\lambda) - P) \lambda d\lambda$$

можно вычислить аналитически и остается необходимость численного интегрирования одного интеграла:

$$\int_0^{t_0} \frac{N(\lambda,1)}{(\alpha_n^2 + \lambda^2)^2} (x(\lambda) - P) \lambda d\lambda.$$

Аналогично преобразуются все интегралы в системе (10).

При вычислении функций Бесселя используется метод, основанный на разложении их по многочленам Чебышева [5]. В отличие от разложения по степеням переменной, такой подход обеспечивает высокую точность при небольшом количестве слагаемых и хранимых констант.

Для вычисления функций Бесселя, представленных разложением по полиномам Чебышева используется схема Кленшо [5].

Из (1), (4) получены выражения компонент поля смещений на верхней лицевой плоскости ($z=h$). Посредством выделения особенностей на основании предельных равенств (8) эти выражения приведены к следующему виду:

$$\begin{aligned} \frac{4G u^1}{\sigma H} \Big|_{z=h} &= \frac{1}{h} \left(\frac{1-\nu}{1+\nu} r + \frac{1}{r} \right) + \frac{1}{h} \left\{ r + (1-\nu) \frac{4+\nu^2 P_0}{r} - \frac{1}{r^3} + \right. \\ &+ \nu \sum_{n=1}^{N-1} \left[\left(r + \frac{4}{\alpha_n^2 r} \right) K_2(\alpha_n r) - \left(2 \frac{1-\nu}{\alpha_n} + \frac{4+\alpha_n^2 t_n^2}{\alpha_n} \right) K_2'(\alpha_n r) \right] \frac{P_n - P}{2\alpha_n K_2'(\alpha_n)} + \\ &+ \nu \sum_{m=1}^{\infty} \left[t_m K_2'(\alpha_m r) - \frac{2}{\alpha_m r} K_2(\alpha_m r) \right] \frac{Q_m}{\alpha_m^3 K_2(\alpha_m)} - \nu h^2 \frac{1-\nu}{6r^3} P + \\ &+ \nu \frac{h}{4} \int_0^T (x(\lambda) - P) \left[(1-2\nu) \coth(\lambda h) - \frac{\lambda h}{\sinh^2(\lambda h)} \right] \frac{\partial}{\partial r} N(\lambda, r) \frac{d\lambda}{\lambda^2} \Big\} \cos(2\theta) \\ \frac{4G v^1}{\sigma H} \Big|_{z=h} &= \frac{1}{h} \left\{ -r - (1-2\nu) \frac{4+\nu^2 P_0}{2r} - \frac{1}{r^3} + \nu P \left(\frac{\nu}{8r} - h^2 \frac{1-\nu}{6r^3} \right) + \right. \\ &+ \nu \sum_{n=1}^{N-1} \left[\left(2 \frac{1-\nu}{\alpha_n} + \frac{4+\alpha_n^2 t_n^2}{\alpha_n} \right) \frac{1}{r} K_2(\alpha_n r) - K_2'(\alpha_n r) \right] \frac{P_n - P}{\alpha_n^2 K_2'(\alpha_n)} + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{vh}{2r} \int_0^T (x(\lambda) - P) \left[(1 - 2v) \coth(\lambda h) - \frac{\lambda h}{\sinh^2(\lambda h)} \right] N(\lambda, r) \frac{d\lambda}{\lambda \sinh(\lambda h)} + \\
 & + v \sum_{n=1}^{\infty} \left[K_2'(\alpha_n r) - \frac{2t_n}{\alpha_n r} K_2(\alpha_n r) \right] \frac{Q_n}{\alpha_n^3 K_2(\alpha_n)} \Big\} \sin(2\theta) \\
 & \frac{4G}{\sigma} \frac{w^1}{H} \Big|_{z=h} = v(1 - v^2) \left(\int_0^T (P - x(\lambda)) N(\lambda, r) \frac{d\lambda}{\lambda} - \frac{2}{2r^2} P \right) \cos(2\theta)
 \end{aligned}$$

Здесь все бесконечные интегралы и суммы сведены к конечным, за исключением рядов с Q_n .

Для улучшения сходимости подвергнем эти ряды дополнительным преобразованиям.

Чтобы оценить порядок сходимости оставшихся здесь бесконечных рядов, воспользуемся асимптотическими формулами [6] для функций Макдональда при больших значениях аргумента:

$$K_2(x) = e^{-x} \sqrt{\frac{\pi}{2x}} \left(1 + \frac{15}{8x} + O(x^{-2}) \right), \quad K_2'(x) = -e^{-x} \sqrt{\frac{\pi}{2x}} \left(1 + \frac{19}{8x} + O(x^{-2}) \right).$$

Из этих формул следует, что при больших значениях n все члены бесконечных рядов убывают как n^{-4} , кроме первой половины бесконечного ряда в выражении для v^1 , которая убывает, как n^{-3} . Для обеспечения 5 точных десятичных цифр в суммах рядов, общий член которых убывает как n^{-4} , достаточно ограничиться их первыми 20 членами. Часть ряда с членами порядка n^{-3} представим в виде:

$$\sum_{n=1}^{\infty} K_2'(\alpha_n r) \frac{Q_n}{\alpha_n^3 K_2(\alpha_n)} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{K_2'(\alpha_n r)}{K_2(\alpha_n)} + \frac{e^{-\alpha_n(r-1)}}{\sqrt{r}} \right) \frac{Q_n}{\alpha_n^3} - \frac{1}{\sqrt{r}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-\alpha_n(r-1)}}{\alpha_n^3} Q_n.$$

В первом из рядов справа порядок убывания членов n^{-4} , и можно ограничиться 20 первыми членами. Последний справа ряд подвергнем еще одному преобразованию.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-\alpha_n(r-1)}}{\alpha_n^3} Q_n = \sum_{n=1}^{K-1} \frac{e^{-\alpha_n(r-1)}}{\alpha_n^3} (Q_n - Q) + Q \frac{h^3}{\pi^3} F_3 \left(\frac{\pi}{h} (r-1) \right),$$

где
$$F_3(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-nx}}{n^3}, \quad \left(x = (r-1) \frac{\pi}{h} \right)$$

Если $x \geq 1/4$, функцию $F_3(x)$ можно вычислить с точностью до 5 десятичных цифр, ограничиваясь первыми 20 членами ряда. Не меньшую точность вычислений обеспечим и на интервале $[0, 1/4]$, если переразложим $F_3(x)$ по полиномам Чебышева [7]. Получаем представление:

$$F_3(x) = \sum_{n=0}^{N_1} (-1)^n b_n T_n(8x-1), \quad x \in [0, 1/4]$$

Коэффициенты b_n представлены в Таблице 1.

Таблица 1.

n	b_n	n	b_n
0	0.1033240864E1	10	0.9949796379E-6
1	0.1590864775	11	0.6172740028E-6
2	0.8792956562E-2	12	0.4026444445E-6
3	0.7414108695E-3	13	0.2753672309E-6
4	0.130106306E-3	14	0.1977236043E-6
5	0.3720659E-4	15	0.1499395458E-6
6	0.1395561911E-4	16	0.1213076125E-6
7	0.6205764356E-5	17	0.106031318E-6
8	0.310638542E-5	18	0.1012301111E-6
9	0.1698246022E-5		

Изучим напряженное состояние одноосно растягиваемого слоя в зависимости от значений относительной полутолщины отверстия $h = H/\rho_0$ и коэффициента Пуассона ν .

Наибольший интерес в рассматриваемой задаче представляет исследование величины и характера распределения по толщине напряжений $\sigma_{\theta\theta}$ при $\theta = 0$ на поверхности отверстия. Данные для расчетных случаев $h = \{1/4, 1/2, 1, 2, 4\}$ приведены в Таблице 2. Они хорошо согласуются с результатами, полученными В.Т. Гринченко [3].

Таблица 2

H	z/h										
	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
1/4	3.0259	3.0253	3.0235	3.0205	3.0162	3.0105	3.0034	2.9947	2.9842	2.9717	2.9591
1/2	3.0643	3.0632	3.0596	3.0533	3.0442	3.0317	3.0151	2.9935	2.9655	2.9293	2.88
1	3.0997	3.0987	3.0954	3.0896	3.0801	3.0657	3.0440	3.0114	2.9620	2.8859	2.762
2	3.0824	3.0824	3.0825	3.0823	3.081	3.077	3.0674	3.0463	3.0007	2.9012	2.66
4	3.0391	3.0396	3.0411	3.0437	3.0472	3.0514	3.0554	3.056	3.0423	2.9717	2.62

В случае фиксированной относительной полутолщины отверстия $h=1/4$, и значений коэффициента Пуассона $\nu = \{1/4, 1/3, 1/2\}$, компонента $\sigma_{\theta\theta}$ принимала следующие значения:

Таблица 3

ν	z/h										
	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
1/4	3.0997	3.0987	3.0954	3.0896	3.0801	3.0657	3.044	3.0114	2.962	2.8859	2.762
1/3	3.1546	3.153	3.1481	3.1391	3.1248	3.1031	3.0708	3.023	2.9515	2.8429	2.670
1/2	3.2988	3.2957	3.2862	3.2691	3.2422	3.202	3.1432	3.0577	2.933	2.7486	2.464

На рис. 1-6 представлено поведение компонент $\{u, v, w\}$ вектора смещения на верхней лицевой поверхности $z=h$ в зависимости от расстояния $r = \rho/\rho_0$ до границы отверстия. При этом полагалось, что угол $\theta = 0$ для компонент $\{u, w\}$ и $\theta = \pi/4$ для компоненты v . Из рисунков 1-6 видно, что по сравнению с решением двумерной задачи Кирша возмущение поля смещений имеет

локальный характер и возрастает по модулю с уменьшением толщины плиты. Подобным же образом зависят компоненты вектора смещения и от значения коэффициента Пуассона ν . Возмущение компонент поля смещений $\{u, v\}$ возрастает (рис.4-5), а компоненты w - убывает (рис.6) с уменьшением значения коэффициента Пуассона.

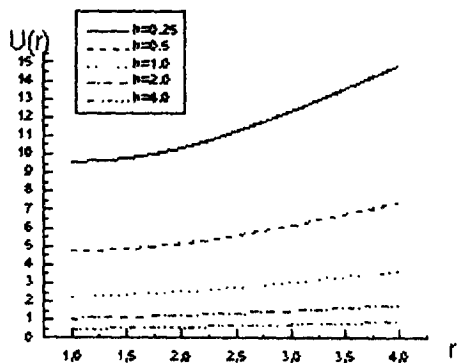


Рис. 1.

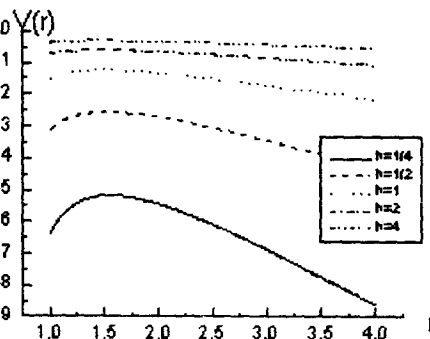


Рис. 2.

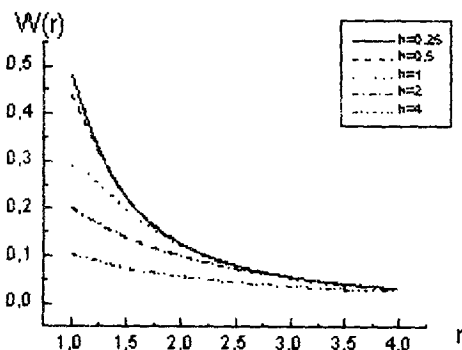


Рис. 3.

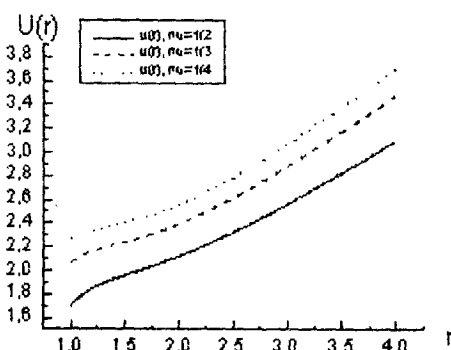


Рис. 4.

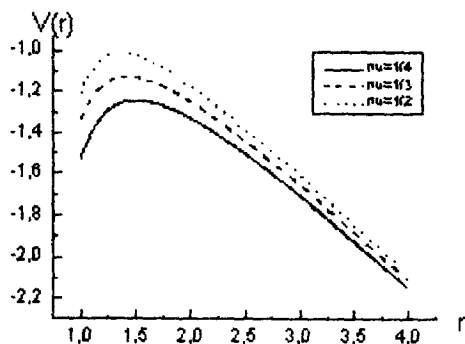


Рис. 5.

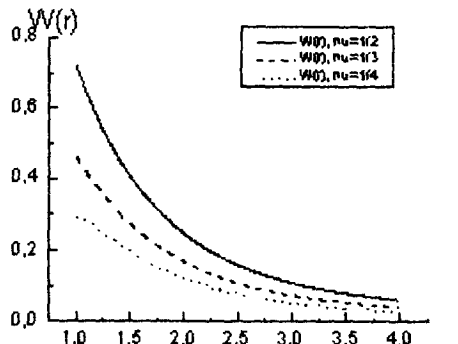


Рис. 6.

Результаты проведенного исследования могут быть использованы при оценке остаточн напряжений в окрестности сварных швов методом сверления отверстий [8, с.287].

Литература.

1. Kirsch G., Die Theorie der Elastizität und die Bedürfnisse der Festigkeitslehre. -Z.VDI, 1898.
2. Гринченко В.Т., Улитко А.Ф., Точное решение задачи Кирша. Прикл. механика, 1970, 6, вып.5, с.10-17
3. Гринченко В.Т., Равновесие и установившиеся колебания упругих тел конечных размеров. Киев: Наукова думка, 1978. 264с.
4. Космодамианский А.С., Шалдырван В.А., Толстые многосвязные пластины. Киев: Наукова думка, 1978. 240с.
5. Люк Ю., Специальные математические функции и их аппроксимации. М: Мир, 1980. 608с.
6. Градштейн И.С., Рыжик И.М., Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М., , Физматгиз, 1962., 1100 с.
7. Ланцош К., Практические методы прикладного анализа. М: Физматгиз, 1961. 524с.
8. Экспериментальная механика: Т.2 / Под ред. Кабаяси А. М: Мир, 1990. 552с.