

ВЛИЯНИЕ ДАВЛЕНИЯ НА МАГНИТНЫЕ СОСТОЯНИЯ ЛЕГКОПЛОСКОСТНЫХ АНТИФЕРРОМАГНЕТИКОВ

*Ю. Н. Мицай, доктор физ.-мат. наук, профессор,
Ю. А. Фридман, кандидат физ.-мат наук, доцент, Г. Э. Байрамалиева*

1. Легкоплоскостные антиферромагнетики являются традиционным объектом изучения [1]. Интерес к исследованию подобных систем связан с тем, что их динамика определяется голдстоуновским спектром элементарных возбуждений, а их магнитострикционные свойства усиливаются обменным взаимодействием.

В последнее время изучаются низкотемпературные антиферромагнетики такие как $\text{NiSiF}_6 \times 6\text{H}_2\text{O}$, $\text{NiZrF}_6 \times 6\text{H}_2\text{O}$ и ряд других соединений. Поведение подобных систем в магнитных полях, перпендикулярных легкой плоскости изучалось в ряде работ [2,3].

Поведение таких систем в магнитном поле, ориентированном в легкой плоскости изучено явно недостаточно. В настоящей работе определены возможные магнитные состояния исследуемой системы в продольном поле при наличии внешнего давления.

Изучение магнитных состояний магнитоупорядоченных веществ под воздействием внешнего давления является эффективным способом исследования таких систем, поскольку внешнее давление эффективно проявляется в виде магнитной анизотропии.

2. Исследуемой системой является сильно анизотропный ($\beta \geq 1$) антиферромагнетик с взаимодействием Дзялошинского. Суммарный магнитный момент лежит в легкой плоскости, в этой же плоскости (XOY) приложено внешнее магнитное поле. Изучим возможные магнитные состояния, реализуемые в системе под действием внешнего давления на статические и динамические свойства исследуемого магнетика. Далее считаем, что внешнее давление также приложено в легкой плоскости ($P < 0$). Как мы увидим далее это наиболее интересный случай.

Гамильтониан нашей системы имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} \mathbf{H} = & -H \sum_{n_1} S_{n_1}^x + \frac{\beta}{2} \sum_{n_1} (S_{n_1}^z)^2 - \sum_{n_1, n_2} \{ J(n_1 - n_2) \mathbf{S}_{n_1} \cdot \mathbf{S}_{n_2} - D(n_1 - n_2) [\mathbf{S}_{n_1} \times \mathbf{S}_{n_2}]_z \} + \\ & + \nu \sum_{n_1} S_{n_1}^j S_{n_1}^k U_{jk}(n_1) + \int dr \left\{ \frac{\lambda + \eta}{2} (U_{xx}^2 + U_{yy}^2 + U_{zz}^2) + \eta (U_{xy}^2 + U_{xz}^2 + U_{yz}^2) + \right. \\ & \left. + \lambda (U_{xx} U_{yy} + U_{xx} U_{zz} + U_{yy} U_{zz}) + P U_{xx} \right\} \end{aligned} \quad (1)$$

здесь $S_{n_i}^\alpha$ - спиновый оператор в узле i -й подрешетки ($\alpha = x, y, z; i = 1, 2$),

$D(n_1 - n_2) < 0$ - взаимодействие Дзялошинского,

ν - константа магнитоупругой (МУ) связи,

λ, η - упругие модули,

$U_{jk}(n_1)$ - тензор деформаций.

В (1) первые три слагаемых описывают магнитную подсистему, пятое слагаемое - упругую подсистему, а четвертое - МУ связь. Дальнейшие исследования будем проводить в низкотемпературном пределе ($T \ll T_N$, T_N - температура Нееля), поскольку в этом случае все расчеты удастся провести аналитически. Кроме того, не теряя общности, предположим, что спин магнитного иона $\langle S \rangle = 1$.

Ориентация магнитных моментов подрешеток, и для системы, описываемой (1) можно представить так как показано на рис. 1.

Повернем систему координат вокруг оси OZ (перпендикулярной плоскости рис.1) так, чтобы новая ось квантования ξ_1 была параллельна вектору намагниченности i -й подрешетки. В этой локальной системе координат введем новые спиновые операторы $S_{n_1}^{\xi}, S_{n_1}^{\eta}, S_{n_1}^{\zeta}$, связанные со старыми соотношениями:

$$\begin{aligned} S_{n_1}^x &= S_{n_1}^{\xi} \cos \Theta_1 + (-1)^{l+1} S_{n_1}^{\eta} \sin \Theta_1; \\ S_{n_1}^y &= (-1)^{l+1} S_{n_1}^{\xi} \sin \Theta_1 + S_{n_1}^{\eta} \cos \Theta_1; \\ S_{n_1}^{\zeta} &= S_{n_1}^{\zeta}, \quad \psi = \frac{\Theta_1 + \Theta_2}{2}, \quad \varphi = \frac{\Theta_1 - \Theta_2}{2} \end{aligned} \quad (2)$$

Дальнейшие вычисления будем проводить, используя операторы Хаббарда [4,7], позволяющие точно учесть как одноионную так и МУ связь. Эти операторы строятся на собственных функциях одноузельного гамильтониана H_0 . Выделяя в обменной части (1) среднее поле, и переходя к локальным координатам (2), для одноузельного гамильтониана получим:

$$\begin{aligned} \mathbf{H} &= -\sum_{n_1} H_1 S_{n_1}^{\xi} + \sum_n (-1)^{l+1} \bar{H}_1 (S_{n_1}^+ + S_{n_1}^-) - \frac{\beta}{8} \sum_{n_1} \left\{ (S_{n_1}^+)^2 + (S_{n_1}^-)^2 - S_{n_1}^- S_{n_1}^- - S_{n_1}^- S_{n_1}^+ \right\} + \\ &+ \frac{\chi}{2} \sum_{n_1} \left\{ (U_{xx}^1 + U_{yy}^1 - U_{zz}^1 - A_1 + B_1) (S_{n_1}^+)^2 + 2A_1 (S_{n_1}^{\xi})^2 + \frac{1}{2} (U_{xx}^1 + U_{yy}^1 - U_{zz}^1 - \right. \\ &\left. - A_1 (S_{n_1}^+ S_{n_1}^- + S_{n_1}^- S_{n_1}^+) + (c_1^1 + c_2^1) (S_{n_1}^+ S_{n_1}^{\xi} + S_{n_1}^{\xi} S_{n_1}^+) + y \cdot \tilde{n} \right\} \end{aligned} \quad (3)$$

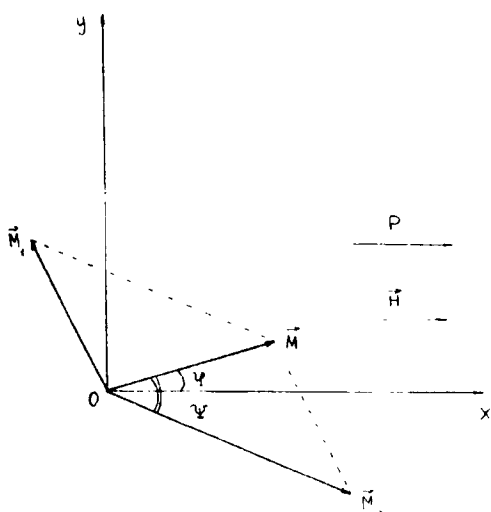


Рис.1. Ориентация магнитных моментов подрешеток.

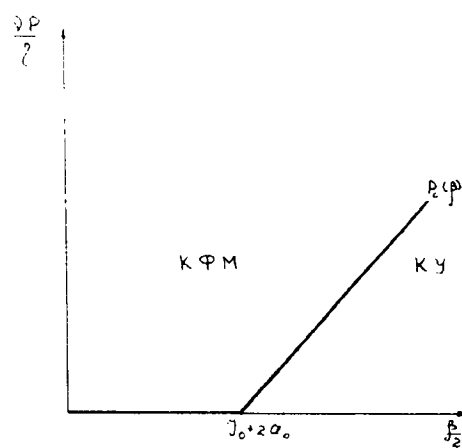


Рис.2. Фазовая диаграмма легкоплоскостного антиферромагнетика в плоскости (P, β) .

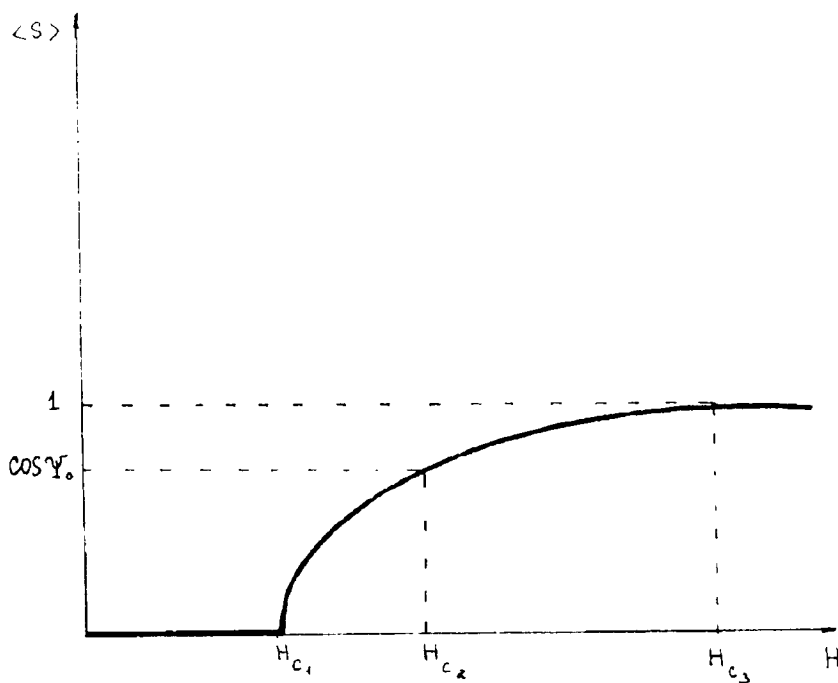


Рис.3. Зависимость средней намагниченности от величины внешнего магнитного поля.

В (3) введены следующие обозначения:

$$\begin{aligned}
 S_{n_1}^{\perp} &= S_{n_1}^{\eta} + iS_{n_1}^{\xi}, \quad \langle S_{n_1}^{\xi} \rangle = \langle S_{n_2}^{\xi} \rangle = \langle S^{\xi} \rangle, \\
 H_1 &= H \cos \Theta_1 - \langle S^{\xi} \rangle [I_0 \cos 2\psi + D_0 \sin 2\psi], \\
 \bar{H}_1 &= \frac{1}{2} \left\{ H \sin \Theta_1 - \langle S^{\xi} \rangle [I_0 \sin 2\psi + D_0 \cos 2\psi] \right\}, \\
 A_1 &= U_{xx}^1 \cos^2 \Theta_1 + U_{yy}^1 \sin^2 \Theta_1 + (-1)^{l+1} U_{yz}^1 \sin 2\Theta_1, \\
 B_1 &= -2i \left\{ U_{yz}^1 \cos \Theta_1 + (-1)^{l+1} U_{xz}^1 \sin \Theta_1 \right\}, \\
 c_1^1 &= (-1) (U_{xx}^1 - U_{yy}^1) \sin 2\Theta_1 + 2U_{yz}^1 \cos 2\Theta_1, \\
 c_2^1 &= -2i \left\{ U_{xz}^1 \cos \Theta_1 + (-1)^{l+1} U_{yz}^1 \sin \Theta_1 \right\}.
 \end{aligned} \tag{3'}$$

Здесь $I_0 = \sum_n I(n)$. Решая одноионную задачу $\mathbf{H}_0(n_1) \psi_{n_1}(M) = E_M^1 \psi_{n_1}(M)$ с гамильтонианом (3) удается определить собственные значения и собственные функции оператора $\mathbf{H}_0(n_1)$ (M - магнитное квантовое число. Для $S=1, M=-1, 0, 1$):

$$\begin{aligned}
 E_{1, \pm 1}^1 &= \frac{\beta}{4} + \frac{\nu^2}{H_1^2 + 4\bar{H}_1^2} \left\{ (U_{xx}^1 + U_{yy}^1) (H_1^2 + 8\bar{H}_1^2) + U_{zz}^1 (H_1^2 + 4\bar{H}_1^2) + A_1 (H_1^2 - 4\bar{H}_1^2) + \right. \\
 &(-1)^{l+1} 2c_1^1 H_1 \bar{H}_1 \left. \right\} m \left\{ \frac{\beta^2}{16} + H_1^2 + 4\bar{H}_1^2 - \frac{\nu\beta}{H_1^2 + 4\bar{H}_1^2} \left[(U_{xx}^1 + U_{yy}^1) H_1^2 - U_{zz}^1 (H_1^2 + 4\bar{H}_1^2) - \right. \right. \\
 &- A_1 (H_1^2 - 4\bar{H}_1^2) + (-1)^{l+1} 2c_1^1 H_1 \bar{H}_1 \left. \right] + \left(\frac{\nu^2}{H_1^2 + 4\bar{H}_1^2} \right)^2 \left[(U_{xx}^1 + U_{yy}^1) H_1^2 - U_{zz}^1 (H_1^2 + 4\bar{H}_1^2) - \right. \\
 &- A_1 (H_1^2 - 4\bar{H}_1^2) + (-1)^{l+1} 2c_1^1 H_1 \bar{H}_1 \left. \right]^2 \left. \right\}^{1/2}, \\
 E_0^1 &= \frac{\beta}{2} + \frac{\nu}{H_1^2 + 4\bar{H}_1^2} \left\{ (U_{xx}^1 + U_{yy}^1) H_1^2 + U_{zz}^1 (H_1^2 + 4\bar{H}_1^2) - A_1 (H_1^2 - 4\bar{H}_1^2) + (-1)^{l+1} 2c_1^1 H_1 \bar{H}_1 \right\}
 \end{aligned} \tag{4}$$

Операторы Хаббарда строятся на собственных функциях \mathbf{H}_0 по стандартным правилам [9] $Y_{n_1}^{M'M} = |\psi_{n_1}(M') \rangle \langle \psi_{n_1}(M)|$ и описывают переход магнитного иона из состояния M в состояние M' . Эти операторы связаны со спиновыми операторами известными соотношениями [10].

Из условия минимума плотности свободной энергии

$$F = F_0 - \ln Z \tag{5}$$

где

F_0 - свободная энергия упругой подсистемы, определяемая последним слагаемым $U_{ik}^{(0)}(n_i)$ в

(1). Найдем равновесные (спонтанные) деформации, которые оказываются следующими:

$$\begin{aligned} U_{xx}^{(0)} &= \frac{b_1'(\eta + 2\lambda) - \lambda(b_2' + b_3')}{\eta(\eta + 3\lambda)}, & U_{yy}^{(0)} &= \frac{b_2'(\eta + 2\lambda) - \lambda(b_1' + b_3')}{\eta(\eta + 3\lambda)}, \\ U_{zz}^{(0)} &= \frac{b_3'(\eta + 2\lambda) - \lambda(b_1' + b_2')}{\eta(\eta + 3\lambda)}, & U_{xz}^{(0)} &= U_{yz}^{(0)} = 0, \\ U_{xy}^{(0)} &= \frac{(-1)^{i+1} \nu (H_1^2 - 4\bar{H}_1^2) \sin 2(\psi + (-1)^{i+1} \varphi) - 4H_1 \bar{H}_1 \cos 2(\psi + (-1)^{i+1} \varphi)}{2\eta} \cdot \frac{1}{H_1^2 + 4\bar{H}_1^2} \cdot \left\{ \operatorname{ch} \frac{x_i^0}{T} + \frac{\beta}{4x_i^0} \operatorname{sh} \frac{x_i^0}{T} - \exp(\beta/4T) \right\} / Z_i^0 \end{aligned} \quad (6)$$

где

$$\begin{aligned} b_1' &= -P - \frac{\nu}{Z_i^{(0)}} \left\{ \left[1 - \frac{H_1 \cos(\psi + (-1)^{i+1} \varphi) + 2\bar{H}_1 \sin(\psi + (-1)^{i+1} \varphi)^2}{H_1^2 + 4\bar{H}_1^2} \right] \operatorname{ch} \frac{x_i^0}{T} - \right. \\ &\quad \left. \frac{(H_1 \sin(\psi + (-1)^{i+1} \varphi) - 2\bar{H}_1 \cos(\psi + (-1)^{i+1} \varphi))^2}{H_1^2 + 4\bar{H}_1^2} \left(\frac{\beta}{4x_i^0} \operatorname{sh} \frac{x_i^0}{T} \right) \cdot \exp(-\beta/4T) \right\} \\ b_2' &= -\frac{\nu}{Z_i^{(0)}} \left\{ \left[1 + \frac{H_1 \sin(\psi + (-1)^{i+1} \varphi) + 2\bar{H}_1 \cos(\psi + (-1)^{i+1} \varphi)^2}{H_1^2 + 4\bar{H}_1^2} \right] \operatorname{ch} \frac{x_i^0}{T} - \right. \\ &\quad \left. \frac{(H_1 \cos(\psi + (-1)^{i+1} \varphi) + 2\bar{H}_1 \sin(\psi + (-1)^{i+1} \varphi))^2}{H_1^2 + 4\bar{H}_1^2} \left(\frac{\beta}{4x_i^0} \operatorname{sh} \frac{x_i^0}{T} \right) - \exp(-\beta/4T) \right\} \\ b_3' &= -\frac{\nu}{Z_i^{(0)}} \left\{ \operatorname{ch} \frac{x_i^0}{T} + \frac{\beta}{4x_i^0} \operatorname{sh} \frac{x_i^0}{T} + \exp(-\beta/4T) \right\} \\ Z_i^{(0)} &= 2 \operatorname{ch} \frac{x_i^0}{T} \exp(-\beta/4T) \end{aligned} \quad (7)$$

Как видно из соотношений (4) и (6) энергетическим уровнем, соответствующим основному состоянию является E_1^i , аналитическое выражение, для которого в нашем приближении следующее:

$$E_1^i = -\frac{H_1^2 + 4\bar{H}_1^2}{\beta} - \frac{\nu P}{\eta} + \frac{2\nu P}{\eta} \cdot \frac{H_1 \bar{H}_1}{H_1^2 + 4\bar{H}_1^2} \sin 2(\psi + (-1)^{i+1} \varphi) + O(\nu^2/\eta). \quad (8)$$

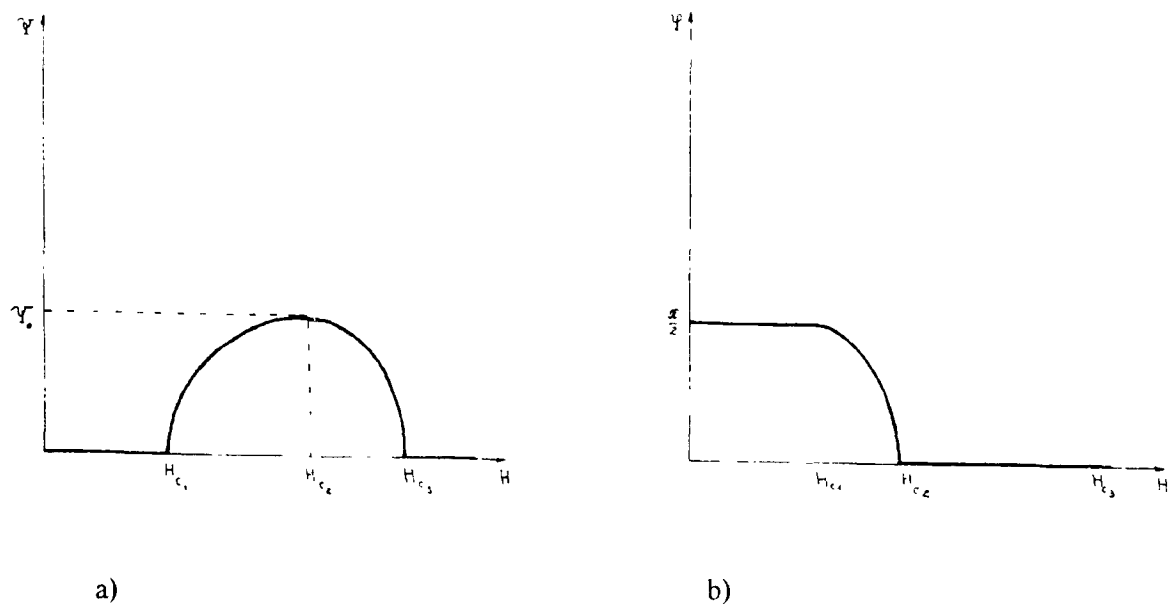


Рис. 4 (а,б). Зависимость углов ориентации подрешеток от величины внешнего магнитного поля.

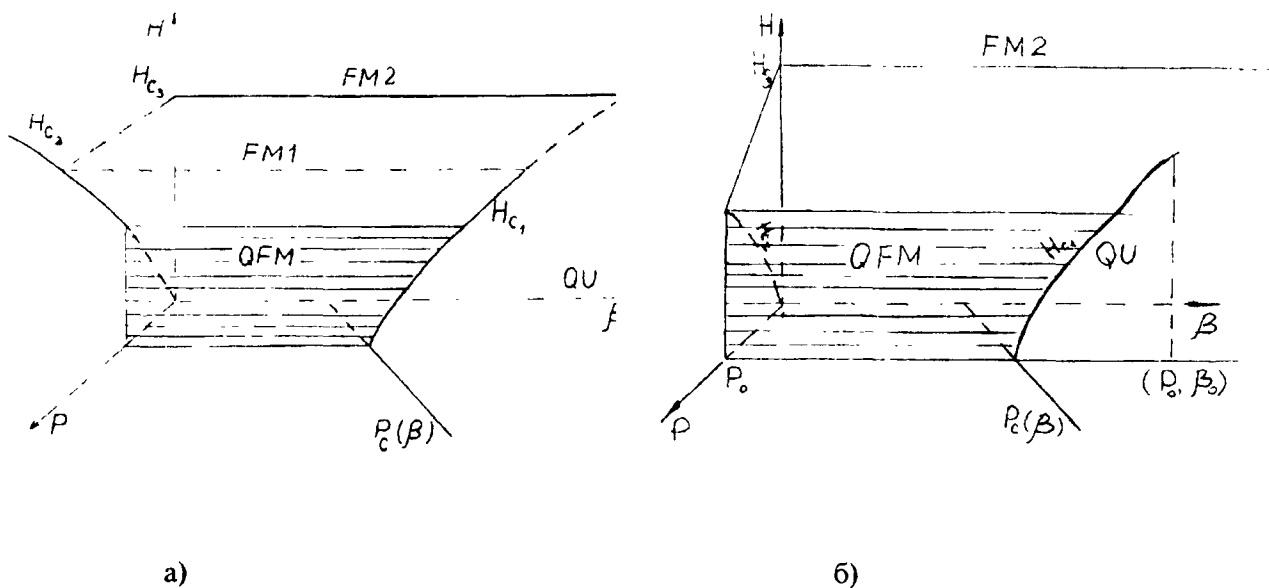


Рис. 5 (а,б). Фазовая диаграмма легкоплоскостного антиферромагнетика в плоскости (P, β, H) .

В этом случае, плотность свободной энергии можно представить в виде

$$F' = F'_{my} + E'_1 \quad (9)$$

Используя соотношение (9) определим фазы, в которых может находиться исследуемая система. Предположим, что система находится при таких значениях поля H и давления P , что средняя намагниченность в узлах ориентирована так, как показано на рис.1. При значениях магнитного поля, больших значения H_{c_2} (при фиксированном давлении) вектор средней намагниченности ориентирован вдоль направления магнитного поля H . В этом случае угол $\varphi = 0$, а ψ определяется из условия минимума плотности свободной энергии F' (9). Это условие приводит к тому, что в фазе с $\varphi = 0$, $\bar{H}_1 = 0$, откуда легко получить соотношение

$$\cos \psi = \frac{H + \langle S^z \rangle |D_0|}{2l_0 \langle S^z \rangle}$$

Можно показать, что в окрестности поля H_{c_2} средняя намагниченность подрешетки примерно равна единице, $\langle S^z \rangle \approx 1$.

Фазу, реализующуюся в полях $H \geq H_{c_2}$ назовем ФМ1-фазой. Величину поля H_{c_2} определим из спектров МУ волн.

Величину поля определим из условия обращения в нуль коэффициента при квадратичном по φ слагаемом в разложении свободной энергии (9)

$$H_{c_2} = -\frac{D_0}{2} + \sqrt{\frac{D_0^2}{4} - 2d_0 l_0} \quad (10)$$

где

$$d_0 = Pv/\eta$$

Дальнейшее увеличение поля приводит к тому, что не только вектор $\vec{M} = \vec{M}_1 + \vec{M}_2$, но и векторы намагниченности подрешеток будут ориентированы вдоль поля (т.е. $\psi = \varphi = 0$). Такая конфигурация реализуется при $H \geq H_{c_3}$, где

$$H_{c_3} = 2l_0 - |D_0|$$

Фазу, реализующуюся при $H \geq H_{c_3}$ назовем ФМ2-фазой. Наибольший интерес представляет случай малых полей, при которых реализуется так называемая квадрупольная (КУ) фаза. Для этой фазы характерно равенство нулю магнитного векторного параметра порядка [8]. Для нашей системы это означает, что равна нулю как средняя намагниченность подрешеток, так и средняя намагниченность в узле. Кроме того, хорошо известно [8], что для легкоплоскостных

ферромагнетиков в поперечном магнитном поле, реализация КУ-фазы связана с инверсией энергетических уровней, т.е. нижайшим уровнем в этой фазе становится E_0 . В рассматриваемой нами системе такой инверсии нет, а реализация КУ-фазы связана с проявлением нескольких чисто квантовых эффектов.

Рассмотрим этот вопрос подробнее. Пусть при некотором поле $H \leq H_{c1}$ система переходит в КУ-фазу. Магнитную фазу, реализуемую при полях $H_{c1} \leq H \leq H_{c2}$ назовем КФМ-фазой (квадрупольно-ферромагнитной). В нашей постановке задачи давление играет роль "эффективной" анизотропии с ОЛН параллельной оси ОУ [6]. При полях, близких к полю перехода КФМ-КУ-фаза, как следует из анализа плотности свободной энергии (9), ее минимуму соответствует значение углов и близких к следующим: $\varphi = \frac{\pi}{2}$, $\psi = 0$ т.е. вектор средней намагниченности системы, а также векторы средней намагниченности подрешеток стремятся "повернуться" к "эффективной" ОЛН.

Средняя намагниченность подрешеток оказывается равной

$$\langle S_{n_i}^z \rangle = 4 \frac{H}{\beta} \cos(\psi + \varphi) \quad (11)$$

Для типичных антиферромагнетиков с взаимодействием Дзялошинского характерны значения углов $\psi \approx \pi/2$. Резкое уменьшение этого угла до малых значений в нашем случае обусловлено, как видно из (10), стремлением модуля намагниченности подрешетки к нулю. Аналогичный эффект вблизи критической температуры для La_2CuO_4 обсуждался в [11]. При $P=0$ и $H=0$ и определенных значениях система находится в КУ-фазе, поскольку $\langle S_{n_i}^z \rangle = 0$. Этот результат можно понять следующим образом: в системе отсутствует выделенная ось, все направления в базисной плоскости (ХОУ) равноправны. Поэтому намагниченности в элементарных магнитных ячейках могут быть направлены произвольным образом, и в "среднем" намагниченность кристалла равна нулю. Эта ситуация аналогична реализации КУ-фазы в сильно анизотропном легкоплоскостном ферромагнетике [7].

Как легко видеть, основное состояние АФМ при $P=0$ и $H=0$ совпадает с собственным вектором $|1\rangle$ оператора $S_{n_i}^z$

$$\psi_{n_i}(1) = |1\rangle,$$

При увеличении давления, средней намагниченности выгодно повернуться вдоль оси "эффективной" анизотропии (ОУ). В этом случае основное состояние АФМ является суперпозицией собственных векторов $|1\rangle$ и $|-1\rangle$ оператора $S_{n_i}^z$, $\psi_{n_i}(1) = \cos \delta_i |1\rangle + \sin \delta_i |-1\rangle$, такая суперпозиция векторов $|1\rangle$ и $|-1\rangle$ приводит к "квантовому сокращению спина" [3]. Этот

эффект характерен для легкоосных магнетиков, находящихся в магнитном поле перпендикулярном легкой оси. В нашем случае причиной этого эффекта является наличие внешнего давления, играющего роль одноосной анизотропии.

В изучаемом нами антиферромагнетике два описанных квантовых эффекта обуславливают существование квадрупольной фазы. Оказывается, что квадрупольная фаза существует вплоть до давлений определяемых формулой

$$\frac{\nu P_c}{\eta} = \frac{\beta}{2} - l_0 - 2a_0 \quad (12)$$

где

$$a_0 = \nu^2 / 2\eta.$$

Эта формула получается при исследовании области существования фазы с отличной от нуля средней намагниченности. На рис.2 указаны какие фазы реализуется при $H=0$ на плоскости (P, β) . Поле перехода КФМ-КУ-фаза (H_{c_1}) определяется из стандартной теории среднего поля выражением:

$$H_{c_1} = \sqrt{\frac{\beta}{2} \left(\frac{\beta}{2} - d_0 - l_0 - 2a_0 \right)}$$

Поведение углов и намагниченности подрешеток, как функции внешнего магнитного поля приведены на рис.(3-4). На рис.3-4 приняты обозначения:

$$\psi_0 = \frac{D_0}{4l_0} + \sqrt{\frac{D_0}{16l_0} + \frac{d_0}{2l_0}}$$

На рис.5а, 5б приведена фазовая диаграмма исследуемого магнетика в координатах (P, β, H) . Как видно из рисунка 5б в плоскости (P, H) возможны переходы КФМ-ФМ1-фаза и ФМ1-ФМ2-фаза.

Однако, при давлении P_0 :

$$\tilde{d}_0 = \frac{P_0 \nu}{\eta} = |D_0| - 2l_0 \quad (13)$$

возможен переход КФМ-ФМ2-фаза, т.е. фаза ФМ1 исчезает (рис.5б). В плоскости (β, H) , как видно из рис.5а возможны следующие переходы: КУ-КФМ-фаза, КУ-ФМ1- фаза, а также ФМ1-ФМ2- фаза. В этом случае также возможна ситуация, при которой ФМ1-фаза исчезает, т.е. возможен переход КУ-ФМ2-фаза при величине константы анизотропии β_0 (рис.5б).

$$\beta_0 = l_0 + d_0 + 2a_0 + \sqrt{(l_0 + d_0 + 2a_0)^2 + 4(2l_0 - |D_0|)^2} \quad (14)$$

Горизонтально заштрихованная область на рис.5б определяет магнитные состояния системы при давлении, а на рис.5а - при произвольном давлении.

Как видно из рис.5 набор магнитных состояний сильно анизотропного легкоплоскостного антиферромагнетика значительно шире, чем для слабо анизотропного, в котором реализуются следующие фазовые переходы: КФМ-ФМ1-фаза и ФМ1-ФМ2-фаза [7].

3. Итак, как мы уже отмечали выше, большая одноионная анизотропия и наличие внешнего давления значительно расширяет класс возможных магнитных состояний легкоплоскостного антиферромагнетика. Необходимо отметить, что внешнее давление можно интерпретировать как наличие определенных механических условий, т.е. условий крепления исследуемого образца [12]. Такой подход крайне важен при интерпретации экспериментальных результатов, поскольку учет механических граничных условий — задача важная и достаточно сложная.

Проведение экспериментальных исследований фазовой диаграммы рассматриваемой системы, как нам кажется, было бы интересным и своевременным. Однако, к сожалению, такие исследования, как нам известно, не проводились.

ЛИТЕРАТУРА

1. И. Е. Дикштейн, В. В. Тарасенко, В. Г. Шавров, ЖЭТФ, 67, 2, (1974)
2. В. Г. Борисенко, Ю. В. Перверзев ФНТ, 11, 730-736, (1985).
3. Bos W. G., Khassen T. O., Poulis N. J., Carlin R. L. Magn. Mater. 15-18, Pt1, 464-466, (1980).
4. Ю. Н. Мицай, Ю. А. Фридман УФЖ, 35, 2, 459-464, (1990).
5. Varret F. J. Phys. Chem. Solids, 37, 3, 257-263, (1976).
6. Э. А. Завадский, Тезисы доклада, Махачкала (1984), 131-132.
7. Ю. Н. Мицай, Ю. А. Фридман УФЖ, 35, 5, (1990).
8. Ф. П. Онуфриева ФТТ, 26, 11, 3435-3437 (1984).
9. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц Статистическая физика, часть 1, М.: Наука (1976), 583 с.
10. Р. О. Зайцев ЖЭТФ, 63, 1, 207-215 (1975).
11. А. И. Банщиков, В. Г. Барьяхтар, Б. А. Иванов, Ю. Н. Мицай СФХТ, 4, 3, (1991).